





ACTAS DO SEMINARIO  
DE  
INICIACIÓN Á INVESTIGACIÓN

ANO 2005

**Comité editorial:**

Miguel Brozos Vázquez

José Carlos Díaz Ramos

Julio González Díaz

Ana Belén Rodríguez Raposo

María Teresa Sánchez Rúa

**IMPRIME:** Imprenta Universitaria  
Pavillón de Servicios  
Campus Universitario

**Dep. Leg.:** C-1811-2006

*Ó saír da aldea, a xélida cor branca das pradeiras empapábaos co seu cheiro frío. Era media mañá cando deixaron o manso val para adentrarse, seguindo o sendeiro que se estreitaba, entre viva madeira de bidueiro e carballo que, nos pesares dun día claro de outono, deixaba caer das poucas follas pardas pequenas bágoas que antes cubrían como capa de xeo a súa superficie. Carmiña ó velo pensou na aldea e, aínda da man do seu avó, voltou a vista cara ó fondo do val, onde, como agochado, descansaba Suarbol no seu recunchiño sombrío.*

*Sen se deter, guiada polo desgastado andar de quen xa non aspiraba as esencias da sorpresa, andaron toda a mañá. As pisadas eran o único son que turbaba o aire blanquecino e ela, sentíase medrar a cada pasiño que oía.*

*Chegaron ó cumio do Cuiña preto xa do mediodía. Na busca da comida, o home non se decatou que a súa neta, no contemplar do infinito, xa non era tan nena: abraiada polo sentimento sobrecolleedor daquel descubrimento, reflectía toda a ledicia que lle inspiraba. Dende a súa nova madurez, con ollos cheos de bágoas, volveu a vista cara o avó:*

*–¿Por que non lle ensinamos isto?*

*–¿A quen?– preguntou el.*

*E ela, respondeu no tono de reproche da súa inocencia*

*–A todo o mundo*

*Santiago de Compostela, 23 de xaneiro do 2006*  
Miguel Brozos Vázquez



# Prefacio

A maioría dos docentes temo-la teima de que o noso alumnado cada curso é un pouco (ou un moito) peor có anterior. Se esta afirmación fose unha verdade matemática a estas alturas estaríamos a aprendelos a facer sumas de quebrados... ben, ben, non só sumas.

Para tódalas falsas verdades sempre existen contraexemplos e eu penso que atopei na autoría destas actas a personalización dun deles.

Estes estudantes, perdón... persoal investigador, non só descubriron, seguro que con moito esforzo, a matemática, senón que tamén souperon asimilar o verdadeiro espírito universitario. Levaron á práctica —o que outra soamente intentou— o poñeren en común o seu traballo, as súas dúbidas, os seus obxectivos, a súa (in)experiencia oradora, facendo do descubremento científico un labor máis solidario e menos solitario.

O feito de que alguén do teu alumnado descubra o marabilloso pracer do estudio e da investigación fai que os quebrados queden rebautizados como racionais. A dedicación á docencia universitaria adquire a súa razón de ser cos logros destes homes e mulleres, aínda que non che deixen participar da súa experiencia.

Só me queda desexar a quen participaron neste seminario, estean ou non presentes os seus traballos nas actas, o mellor dos futuros tanto no profesional como no persoal.

*Santiago de Compostela, 1 de febreiro de 2006*  
María Elena Vázquez Abal





# Índice Xeral

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>José Carlos Díaz Ramos</b> “Unha introducción á curvatura”	<b>3</b>
<b>María Teresa Sánchez Rúa</b> “Introducción a los problemas débiles”	<b>5</b>
<b>Ana Belén Rodríguez Raposo</b> “Introducción á álgebra (cuántica)”	<b>9</b>
<b>Julio González Díaz</b> “Matemáticas y Economía: Teoría de Juegos”	<b>13</b>
<b>Antonio Sotelo Armesto</b> “Foliaciones: hojaldres en variedades”	<b>17</b>
<b>Francisco Javier Fernández Fernández</b> “Control óptimo de sistemas físicos. Aplicaciones medioambientales”	<b>19</b>
<b>Pablo Fernández Ascariz</b> “Módulos cruzados de álgebras conmutativas”	<b>23</b>
<b>Beatriz Pateiro López</b> “Estadística en Finanzas”	<b>27</b>
<b>Miguel Brozos Vázquez</b> “Xeometría e Cosmoxía”	<b>31</b>
<b>Andrés Prieto Aneiros</b> “Un problema da Acústica: a lavadora do meu veciño”	<b>33</b>
<b>Rosa María Crujeiras-Casais</b> “Datos no espazo: unha introdución á xeoestatística”	<b>35</b>

<b>Silvia Vilarino Fernández</b> “Introducción a la geometría k-simpléctica”	<b>39</b>
<b>Luz María García García</b> “Matemáticas y Medio Ambiente”	<b>43</b>

# Introducción

En diversas ocasións, en discusións entre alumnos de Terceiro Ciclo, expúxose a necesidade de intercambiar coñecemento e dar a coñecer o traballo propio non só dentro dun mesmo departamento ou área específica, senón dun xeito máis global. Tras coñecer o sistema de funcionamento de distintos seminarios en Universidades de outros países, plantexouse a posibilidade de levar a cabo un seminario que cumprise estes obxectivos entre os alumnos de Terceiro Ciclo da Facultade. Neste marco de interdisciplinabilidade, a empresa semellaba complicada, mais non faltou ilusión, e marcáronse como obxectivos a perseguir os seguintes:

1. Fomentar o intercambio de coñecemento.
2. Proporcionar un lugar onde se dean a coñecer os campos nos que cada un leva a cabo as súas investigacións.
3. Facilitar a práctica de falar en público e, máis en concreto, dar charlas. De igual xeito, afacerse a escoitar e participar activamente neste tipo de eventos.
4. Desenvolver as habilidades necesarias para que cada quen saiba explicar, a persoas non especialistas no seu campo, sobre que versan os seus traballos.

Deste xeito, como se pode apreciar no cuarto punto, transformabamos a dificultade intrínseca de ter unha audiencia non homoxénea (departamentos de Álgebra, Análise Matemática, Estatística e Investigación Operativa, Matemática Aplicada e Xeometría e Topoloxía), nun reto do que sacar proveito. Así, o ter que explicar a unha audiencia non formada nun campo, certas cuestións concretas, forzaría ó conferenciante a facer pé moi concretamente nos aspectos máis relevantes, clarexando as ideas propias da súa teoría ou campo.

Unha vez reunido un comité, que trataba de representar a todos os departamentos, escolleuse o modelo de seminario que máis se axustara ás nosas características. Coa consciencia de que unha das maiores dificultades que deberíamos afrontar era incentivar adecuadamente tanto a asistencia como a participación dos nosos compañeiros, presentamos un modelo que posuía como característica fundamental o non permitir a asistencia de profesores. A pesar de que esta medida non estivo exenta de certa polémica, foi un condicionante esencial para atopar conferenciantes e motivar a intervención dos asistentes ás charlas. A posteriori podemos dicir que esta foi unhas das claves do seu éxito.

Se ben a idea inicial foi facer un seminario semanal, a súa periodicidade viuse alterada en certas ocasións pola ausencia de participantes debido a viaxes científicas. Así, tomouse o martes ás catro da tarde como día e hora de referencia do seminario, e creouse unha lista de posibles asistentes, que se viu co tempo incrementada coa inclusión de alumnos do último ano da Licenciatura. A data de comezo foi o 12 de Abril de 2005.

Xa en común con todos os asistentes ó seminario, faltaba solventar unha das tarefas máis complicadas: ¡buscar un nome ó seminario!. Tras certo debate e a dificultade de atopar un nome que resumise, ou alomenos dese idea do seu espírito, acordouse adoptar o de Seminario de Iniciación á Investigación (SII).

Non contentos con esta efímera difusión de coñecementos, decidiuse ademais elaborar unhas actas que recollesen un resumo do contido de cada charla, que servise de referencia ós que tiveran participado como asistentes e permitise ó conferenciante clarear calquera posible dúbida que xurdise na charla ou considerase oportuno. E foi así como naceron as Actas do Seminario de Iniciación á Investigación, sendo este o primeiro anuario, que corresponde ó período Abril-Decembro do 2005.

## Agradecementos

Os membros do comité encargado da organización do Seminario e a edición das súas actas, queremos facer expreso o noso agradecemento a todos aqueles que contribuíron coa súa asistencia a facer do Seminario algo vivo, que no seu primeiro ano acadou os obxectivos propostos. Desexamos tamén agradecer moi especialmente a todos aqueles que tiveron un papel destacado, ben como conferenciante, e polo tanto autor do correspondente resumo, ben como revisor das actas.

Santiago de Compostela, a 23 de Xaneiro do 2006.

## Unha introducción á curvatura

José Carlos Díaz Ramos

Departamento de Xeometría e Topoloxía

12 de Abril de 2005

### Resumo

O obxectivo desta charla foi introducir de xeito intuitivo o concepto de variedade de Riemann e ver como a curvatura dunha superficie se pode xeneralizar a dimensións superiores. A maior parte dos conceptos son extensións directas das nocións habituais en superficies. As variedades de Riemann cobraron importancia cando Albert Einstein tomou as ideas de Riemann para formular a súa teoría da Relatividade Xeral.

Unha *variedade*  $M$  de dimensión  $n$  é un espacio topolóxico Hausdorff segundo numerable localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Toda variedade é un espacio métrico.

Unha *estructura diferenciable* en  $M$  é unha familia  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  tal que  $U_i$  é un aberto de  $M$ ,  $\phi_i$  é un homeomorfismo (chamado carta ou coordenadas) de  $U_i$  cun aberto de  $\mathbb{R}^n$  e  $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$  é un difeomorfismo entre abertos de  $\mathbb{R}^n$ . A unha variedade dotada dunha estrutura diferenciable chámasele *variedade diferenciable*. Unha *aplicación diferenciable* entre dúas variedades  $M$  e  $N$  é unha aplicación  $f : M \rightarrow N$  que escrita en coordenadas é diferenciable.

**Teorema 1. (Whitney)** *Toda variedade diferenciable pode embeberse en  $\mathbb{R}^N$ , con  $N$  suficientemente grande, é dicir, existe un difeomorfismo  $f : M \rightarrow f(M) \subset \mathbb{R}^N$ .*

Aínda que o concepto de espacio tanxente pode ser definido de xeito abstracto, podemos pensar, en virtude do teorema anterior, que este é o espacio tanxente usual a un subconxunto diferenciable de  $\mathbb{R}^n$  ó igual que sucedía en superficies.

Unha *variedade de Riemann*  $(M, g)$  é unha variedade diferenciable tal que no tanxente a cada punto hai un produto interior  $g$  que varía diferenciablemente. Nunha variedade de Riemann pódense definir os conceptos de lonxitude de vectores e curvas, e volumes de rexións, entre outros: basta adaptar as fórmulas usuais de sumas de Riemann en  $\mathbb{R}^n$  e observar que ditas fórmula dependen só do produto interior no tanxente  $g$ .

Nunha variedade de Riemann pódese definir a seguinte distancia:  $d(p, q)$  é o ínfimo das lonxitudes das curvas unindo  $p$  e  $q$ . Tal distancia induce a topoloxía de partida da variedade. Unha *esfera xeodésica* de centro  $m \in M$  e radio  $r > 0$  é o conxunto  $G_m(r) = \{p \in M : d(p, m) = r\}$ . Un problema importante na xeometría

---

PALABRAS CLAVE: Variedades de Riemann, curvatura.

diferencial é averiguar se a xeometría da variedade está determinada polo volume dunha esfera xeodésica. O exemplo máis característico desta cuestión é a conxectura do volume de Gray e Vanhecke: se as esferas xeodésicas dunha variedade teñen o mesmo volume ca unha esfera euclidiana do mesmo radio, ¿é a variedade localmente isométrica a un espacio euclidiano? Aínda que se coñece que a resposta é afirmativa nun certo número de casos, o problema permanece aberto no seu contexto máis xeral.

Tomemos agora unha superficie  $S$  en  $\mathbb{R}^3$  e sexa  $\mathbf{x}_3$  o seu vector normal unitario (despois de fixar unha orientación local). A curvatura de Gauss en  $p \in S$ ,  $K_p$ , defínese como

$$K_p = \lim_{\text{vol}(\mathcal{R}) \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(\mathbf{x}_3(\mathcal{R}))}{\text{vol}(\mathcal{R})},$$

onde  $\mathcal{R}$  é unha rexión contendo a  $p$ . Equivalentemente, no espírito do Teorema da Diverxencia ou do Teorema de Stokes, pódese probar que  $K_p = \det D\mathbf{x}_3$ , que é a definición que se soe empregar nos textos.

**Teorema 2. (Gauss Theorema Egregium)** *Verifícase que*

$$K = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2},$$

onde  $R$  é un tensor que só depende do produto interior  $g$ .

O tensor  $R$  do teorema anterior chámase *tensor de curvatura* da variedade. Xa que  $R$  non depende máis que do produto interior no tanxente (chamado en superficies primeira forma fundamental), a curvatura de Gauss dunha superficie é un invariante xeométrico *intrínseco* á superficie que non depende do xeito particular en que estea embebida en  $\mathbb{R}^3$  ou sequera do feito de que sexa un subconxunto de  $\mathbb{R}^N$ . Esta foi a idea que tomou Riemann para definir as variedades que levan o seu nome: unha variedade abstracta xunto cun produto interior no tanxente. A partir de aquí, pode definirse a curvatura sen máis que tomar a fórmula anterior para a curvatura de Gauss de calquera plano tanxente. Isto é o que se coñece como *curvatura seccional* dun plano tanxente.

Un dos obxectivos da xeometría de Riemann é estudar a curvatura da variedade e determinar en que medida influencia a súa xeometría ou incluso a súa topoloxía.

## Introducción a los problemas débiles

María Teresa Sánchez Rúa

Departamento de Matemática Aplicada

19 de Abril de 2005

### Resumen

El objetivo de esta charla fue introducir, de manera formal y sencilla, los conceptos de formulación variacional, solución débil y los espacios de Sobolev que utilizamos para resolver de manera eficaz ecuaciones en derivadas parciales elípticas. Para ello vamos a centrarnos en estudiar la ecuación del laplaciano.

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un abierto acotado con frontera  $\Gamma = \partial\Omega$ . Nuestro problema es encontrar una función  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que verifique

$$-\Delta u = f \text{ en } \Omega, \quad (1)$$

$$u = 0 \text{ sobre } \Gamma, \quad (2)$$

donde  $\Delta$  denota el operador laplaciano y  $f$  es una función dada. La condición en la frontera  $u = 0$  sobre  $\Gamma$  se llama *condición Dirichlet* (homogénea).

Una *solución clásica* de nuestro problema es una función  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$  que verifica (1)-(2).

Vamos a utilizar un razonamiento usual para obtener, formalmente, una solución aproximada del problema (1)-(2). Multiplicamos la ecuación (1) por una función test  $v$  en un espacio adecuado (que describiremos a continuación) e integramos por partes:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma = \int_{\Omega} f v dx,$$

donde  $n$  es el vector normal exterior a  $\Gamma$ . Teniendo en cuenta que nuestra solución  $u$  debe verificar la condición sobre la frontera (2), vamos a considerar funciones test  $v$  en esas condiciones y obtenemos

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \forall v; v = 0 \text{ sobre } \Gamma. \quad (3)$$

Nuestro objetivo es utilizar la expresión (3) para aproximar la solución del problema (1)-(2). Para ello, definimos un espacio de Hilbert en el que las funciones test utilizadas tengan sentido.

En primer lugar, introducimos el concepto de *derivada distribucional*. Denotamos por  $\mathcal{D}(\Omega)$  el espacio vectorial de las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto contenido en  $\Omega$ .

---

PALABRAS CLAVE: Formulación variacional, espacios de Sobolev, solución débil.

**Definición 1.** Si  $u \in L^2(\Omega)$ , se dice que  $u$  tiene derivada generalizada  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  si existe un elemento  $g \in L^2(\Omega)$  tal que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g \phi dx, \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (4)$$

**Definición 2.** Definimos el espacio de Sobolev  $H^1(\Omega)$  como el conjunto

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2, 3 \right\}.$$

Este espacio es un espacio de Hilbert cuyo producto escalar asociado viene dado por

$$(u, v)_1 = \int_{\Omega} u v dx + \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, u, v \in H^1(\Omega),$$

y su norma se define

$$\|u\|_1 = \left( \int_{\Omega} u^2 dx + \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Debido a la condición sobre la frontera que debemos imponer en nuestro problema, introducimos un subespacio de  $H^1(\Omega)$  que tenga en cuenta dicha condición. Consideramos el subespacio  $H_0^1(\Omega)$  que denota la clausura de  $\mathcal{D}(\Omega)$  en  $H^1(\Omega)$ . Las funciones de  $H_0^1(\Omega)$  son, en cierto modo, las funciones de  $H^1(\Omega)$  que se anulan sobre la frontera  $\Gamma$ .

Una *solución débil* del problema (1)-(2) es una función  $u \in H_0^1(\Omega)$  que verifica la ecuación variacional

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (5)$$

Toda solución clásica del problema (1)-(2) es solución débil.

**Teorema 1.** Para toda función  $f \in L^2(\Omega)$ , existe una única función  $u \in H_0^1(\Omega)$  solución débil del problema (1)-(2).

Una vez obtenida la formulación débil asociada al problema (1)-(2) calculamos una solución aproximada mediante el *método de elementos finitos*. En primer lugar, consideramos una triangulación del dominio  $\Omega$ . Sobre ella definimos un espacio vectorial de dimensión finita que aproximará al espacio  $H_0^1(\Omega)$ . De esta forma, el problema variacional se escribe en términos del espacio vectorial aproximado y, tras algunos cálculos, se convierte en un sistema de ecuaciones, mucho más sencillo de resolver.

Para profundizar en el tema se pueden consultar los títulos [1]-[3].



## Bibliografía

- [1] Adams, R.A. *Sobolev spaces*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65. Academic Press, 1975.
- [2] Brézis, H. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, 1983.
- [3] Raviart, P.A. - Thomas, J.M. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, 1983.



## Introducción á álgebra (cuántica)

Ana Belén Rodríguez Raposo

Departamento de Álgebra

3 de Maio de 2005

### Resumo

No século XX apareceron na física dúas grandes teorías que parecían describir todo, dende o moi grande ó moi pequeno: a física relativista e a física cuántica. Aínda que ambas teorías teñen a aparencia de seren correctas, cando se queren estudar en conxunto aparecen contradicións que ata o de agora foron insalvables. O problema é que na física cuántica trabállase en espazos de Hilbert que teñen unha difícil interpretación en termos da xeometría de Lorenz utilizada en relatividade. Para resolvelo dende un punto de vista alxébrico sería suficiente atopar dúas álxebras tales que o resultado de tensorizar unha por outra tivese unha estrutura de álgebra axeitada. Esta sería a álgebra que necesita un observador A para describir unha pequena parcela do universo, na que por exemplo se atope B. Pero como B tamén pode observar a A, esta álgebra que atopemos debe ser axeitada para que B observe a A, o cal A debe ter en conta. É dicir, temos dous puntos de vista, e ambos válidos segundo di a relatividade, e necesitamos reflexar esta información na nosa estrutura de álgebra que resolve o problema que plantexamos. Como debemos gardar unha certa simetría entre o que observa A e o que observa B, esta estrutura debe gardar tamén unha simetría interna. A solución a este problema son as álxebras de Hopf, que son estruturas autoduais que sirven para resolver os problemas matemáticos nos que vemos reflexada esta filosofía.

Sempre que se fala deste tipo de estruturas simétricas resulta moi cómodo pensar nunha liguaxe de categorías. Unha categoría é unha colección (non necesariamente un conxunto) de obxectos de características similares que están relacionados mediante morfismos ou flechas (aplicacións nos casos máis comúns) que verifican que o morfismo (a aplicación) identidade é sempre un de tales morfismos, que a composición de dous morfismos da categoría da coma resultado un morfismo da categoría e outro axioma técnico. Por exemplo, se tomamos tódolos espazos topolóxicos e tódolos homeomorfismos (aplicacións continuas) teremos a categoría de espazos topolóxicos. Se  $K$  é un corpo (pode pensarse en  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) e consideramos tódolos  $K$ -espazos vectoriais e tódalas aplicacións lineares obtémo-la categoría de  $K$ -espazos vectoriais. A partir de aquí pódese considerar, sempre que se fale dunha categoría  $\mathcal{C}$ ,

---

PALABRAS CLAVE: Álgebra, coálgebra, álgebra de Hopf.

que é a categoría de  $K$ -espacios vectoriais, ou máis en xeral a de  $A$ -módulos, sendo  $A$  un anel conmutativo.

Como se mencionou no párrafo anterior un dos motivos para utiliza-la linguaxe categórica é que nela resulta moi natural a definición de dualidade. A dualidade é unha especie de simetría que o que nos di é, a grosso modo, que cambiémo-las flechas de sentido. É dicir, se nunha categoría temos unha flecha  $f : M \rightarrow N$  o seu dual será  $\hat{f} : N \rightarrow M$ . Se o que temos é un diagrama cambiaremos todas as flechas de dirección e o diagrama seguirá a ser conmutativo. Ou, en xeral, se un teorema se cumpre tamén se cumpre o seu dual.

Agora que xa temos introducidos os conceptos previos pasaremos a centrarnos nun tipo especial de categorías, que son as que se utilizan en álgebra cuántica. Estas categorías chámanse categorías monoidais braided (ou simétricas). Unha categoría monoidal braided  $\mathcal{C}$  é unha categoría na que existe un tipo especial de produto, chamémoslle produto tensor, de tal xeito que se  $M$  e  $N$  son obxectos da categoría entón  $M \otimes N$  tamén é un obxecto da categoría. Ademais existe un obxecto especial  $K$ , que se adoita coñecer coma obxecto base, tal que  $M \otimes K = K \otimes M = M$  (estas igualdades son isomorfismos estrictamente falando, pero na práctica poden considerarse igualdades). Por último, existe un modo canónico (unha transformación natural) para intercambiar obxectos de lado, é dicir, temos un morfismo canónico  $c_{M,N} : M \otimes N \rightarrow N \otimes M$  definido para calquer par de obxectos da categoría. Este morfismo canónico é o braiding ou trenza. É claro que a categoría de  $K$ -espacios vectoriais cumpre todas estas propiedades, se consideramos o produto tensor de  $K$ -espacios vectoriais, o propio  $K$  de obxecto base e o braiding  $c_{M,N}(m \otimes n) = n \otimes m$ .

### NOTA SOBRE O PRODUCTO TENSOR

A razón fundamental pola que se utiliza o produto tensor é que se temos unha aplicación bilinear entre  $K$ -espacios vectoriais, ou obxectos similares coma  $A$ -módulos,  $\beta : V \times W \rightarrow U$ , existe unha única aplicación linear  $b : V \otimes_K W \rightarrow U$  tal que  $\beta(v \times w) = b(v \otimes w)$ . É dicir, que transformamos unha aplicación relativamente complexa (unha aplicación linear) nunha aplicación sinxela e que ademais está dentro da categoría na que traballamos. Analiticamente o produto tensor de dous  $K$ -espacios vectoriais  $V$  e  $W$  é o seguinte: se  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é unha base de  $V$  e  $\{d_1, \dots, d_m\}$  é unha base de  $W$  obtemos que  $\{e_i \otimes d_j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$  é unha base de  $V \otimes_K W$ . Pero con esta construción, se ben máis práctica, non se aprecia a utilidade da definición de produto tensor. Para isto repasemos o que é unha aplicación bilinear:

Unha aplicación  $\beta : V \times W \rightarrow U$  é bilinear se verifica que:

1.  $\beta(v + v', w) = \beta(v, w) + \beta(v', w)$
2.  $\beta(v, w + w') = \beta(v, w) + \beta(v, w')$
3.  $\beta(vk, w) = \beta(v, kw)$
4.  $\beta(kv, w) = k\beta(v, w), \beta(v, wk) = \beta(v, w)k$

Agora trataremos de obter un novo  $K$ -espacio vectorial asociado a  $V$  e  $W$  no que a aplicación multilinear  $\beta$  sexa linear. Para isto faremos cero os elementos nos que a aplicación bilinear está definida de xeito non linear, por dicilo dalgunha maneira. Para isto construímos un  $K$ -espacio vectorial, no que a base está formada por tódolos elementos de  $V \times W$ , e os elementos son da forma  $\sum_{v \times w \in V \times W} k_{v \times w} v \times w$ , con  $k_{v \times w} \in K$ . Chamémoslle  $F$  a este  $K$ -espacio vectorial, e sexa  $T$  o subespacio xerado polos elementos conflictivos, é dicir, polo conxunto  $\{(v + v', w) -_F (v, w) -_F (v', w), (v, w + w') -_F (v, w) -_F (v, w'), (vk, w) -_F (v, kw)\}$ , onde denotamos por  $-_F$  a suma do oposto en  $F$ . Se agora facemos  $F/T$  estamos establecendo unha relación de equivalencia definida do seguinte modo:  $f \sim g \Leftrightarrow f -_F g \in T^1$ . Se consideramos o conxunto cociente podemos definir a suma e o produto por elementos de  $K$  sumando ou facendo o produto por escalares en función dos representantes de clase, posto que é independente de cal se escolla. Neste conxunto cociente é sinxelo comprobar que os elementos de  $T$ , os que son conflictivos, son da clase de equivalencia de 0, é dicir, que xa eliminamos os elementos que nos sobran. Este conxunto cociente é o que coñecemos por  $V \otimes_K W$ . Agora se temos unha aplicación bilinear  $\beta : V \times W \rightarrow U$  podemos obter unha aplicación linear  $b : V \otimes_K W \rightarrow U$  tal que  $b(v \otimes w) = \beta(v, w)$ .

Se definimos unha álgebra nunha categoría de  $K$ -espacios vectoriais (unha  $K$ -álgebra), é dicir, se a un  $K$ -espacio vectorial o dotamos dunha estrutura de anel compatible coa estrutura de  $K$ -espacio vectorial o que obtemos é que a multiplicación no anel é bilinear, é dicir:

Sexa  $A$  un  $K$ -espacio vectorial que ademais é un anel. Denotemos a multiplicación en  $A$  por  $M_A : A \times A \rightarrow A$ . Esta multiplicación ten que ser asociativa, ter elemento neutro e ser distributiva con respecto da suma en  $A$ . Así o que teremos será que  $M_A(a + a', b) = M_A(a, b) + M_A(a', b)$ , e o mesmo se a suma aparece na segunda variable. Tamén debe verificar que  $M_A(ka, b) = kM_A(a, b)$ ,  $M_A(a, bk) = M_A(a, b)k$  e  $M_A(ak, b) = M_A(a, kb)$ . É dicir, que é unha aplicación bilinear, co cal temos que a operación que define á álgebra saese da categoría de  $K$ -espacios vectoriais, o cal supón unha traba para estudiala dende un punto de vista categórico. Sen embargo se consideramos a operación definida en  $A \otimes_K A$  sucederá que ven dada en función dun morfismo linear, co cal non saímos da categoría de  $K$ -espacios vectoriais, e ademais será suficiente pedi-la asociatividade, xa que a propiedade distributiva (bilinearidade) irá implícita no feito de que a operación estea definida no produto tensor.

Volvamos agora á nosa categoría monoidal braided  $\mathcal{C}$ . Podemos xeralizar á nosa categoría o concepto de  $K$ -álgebra. Agora unha álgebra non é máis ca un obxecto  $A$  da categoría para o que existe un produto  $\mu_A : A \otimes A \rightarrow A$  e unha unidade  $\eta_A : K \rightarrow A$  sendo ambas aplicacións lineares e que verifican:

- $\mu_A(\mu_A(a \otimes b) \otimes c) = \mu_A(a \otimes \mu_A(b \otimes c))$  (propiedade asociativa)
- $\mu_A(a \otimes \eta_A(k)) = \mu_A(\eta_A(k) \otimes a) = a$  (elemento neutro)

<sup>1</sup>A idea é a mesma que a empregada para defini-las relacións de equivalencia en  $\mathbb{Z}_p$ .

Como o que queremos é estudar obxectos autoduais debemos defini-lo concepto dual dunha álgebra: unha coálgebra. Se agora ó obxecto (espacio vectorial) lle chamamos  $C$ , dámoslle a volta ás frechas que tiñamos arriba e lles chamamos  $\delta_C : C \rightarrow C \otimes C$  e  $\varepsilon_C : C \rightarrow K$  obteremos unhas propiedades duais das que tiñamos para unha álgebra (utilizamos a chamada *notación de Sweedler*  $\delta_C(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}$ ):

- $c_{(1)(1)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes c_{(2)} = c_{(1)} \otimes c_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)}$  (coasociatividade: é o mesmo facer  $\delta_C$  e despois volverlla a aplicar a  $c_{(1)}$  que facer  $\delta_C$  e despois volverlla a aplicar a  $c_{(2)}$ )
- $\varepsilon_C(c_{(1)}) \otimes c_{(2)} = c_{(1)} \otimes \varepsilon_C(c_{(2)}) = c$  (counidade: se facemos primeiro unha  $\delta_C$  e logo aplicamos  $\varepsilon_C$  a  $c_{(1)}$  ou a  $c_{(2)}$  volvemos obter  $c$ ).

Unha álgebra de Hopf  $H$  é unha álgebra (existen un morfismo  $\mu_H$  e outro  $\eta_H$ ) e unha coálgebra (existen  $\delta_H$  e  $\varepsilon_H$ ) que verifican unha relación de compatibilidade dada en función de  $\tau$  (escribimos  $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$  aínda que isto non é exacto, e  $\mu_H(x \otimes y) = xy$ ):

$$\delta_H(\mu_H(x \otimes y)) = x_{(1)}y_{(1)} \otimes x_{(2)}y_{(2)}$$

e ademáis o comportamento de  $\eta_H$  ó compoñela con  $\delta_H$  é bo, é dicir,  $\delta_H \circ \eta_H = \eta_H \otimes \eta_H$  (equivalentemente o comportamento de  $\mu_H$  con  $\varepsilon_H$  é bo).

As álgebras de Hopf son os obxectos autoduais que se empezaron a estudar en relación con estes problemas que xorden da compatibilización da física cuántica e a relatividade. Máis adiante descubríronse outro tipo de construcións autoduais, coma as estruturas entrelazadas, as estruturas entrelazadas febles e as álgebras de Hopf febles (ou grupoides cuánticos) máis axeitados para a resolución destes problemas físicos. Utilizando estes conceptos pode definirse e ampliarse a definición de extensión de Galois, que resulta moi importante á hora de comprender-la resolución de certos problemas xeométricos da física cuántica. Os últimos avances neste campo nos levan ó concepto de coanel e de bialgebroides de Hopf, pero isto quedará para posteriores charlas sobre álgebra cuántica.

## Bibliografía

- [1] S.Majid: *Physics for Algebraists: Non-commutative and Non-cocommutative Hopf Algebras by a Bicrossproduct Construction* J.Algebra 130 (1990), 17-64.
- [2] S.Majid: *Hopf Algebras for physics at the Plank scale* J.Classical Quantum Gravity 5 (1988), 1587-1606.

## Matemáticas y Economía: Teoría de Juegos

Julio González Díaz

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

9 de Mayo de 2005

### Resumen

Enmarcada dentro de las matemáticas y, más específicamente, dentro de la investigación operativa, la teoría de juegos es una herramienta desarrollada para modelar situaciones en las que varios agentes (jugadores) entre los que existe un conflicto de intereses, compiten (juegan). Aunque en sus orígenes la teoría de juegos se utilizó para analizar estratégicamente conflictos bélicos, pronto se empezó a utilizar en economía y más adelante en psicología, biología, . . . Es precisamente dentro de la economía donde la teoría de juegos ha tenido una mayor repercusión, permitiendo dotar a la teoría económica de un formalismo matemático del que hasta entonces había carecido.

En esta charla se pretende hacer una breve introducción a la teoría de juegos. Por un lado se presentarán los juegos cooperativos. Éstos estudian situaciones en las que los distintos agentes pueden, a través de la cooperación, asegurarse un cierto beneficio. La esencia de los juegos cooperativos es el estudio, desde el punto de vista axiomático, de las posibles formas de llevar a cabo el reparto de dichos beneficios. Por otro lado se encuentran los juegos no cooperativos, pensados para estudiar situaciones puramente competitivas y que por tanto se centran en el análisis de los modelos desde un punto de vista estratégico.

### Juegos Cooperativos

En esta primera parte presentamos un modelo que nos permitirá introducir los juegos cooperativos. La Figura 1 ilustra un *problema de asignación de costes*. Tenemos un pueblo con un pozo de agua al que desean conectarse todos los habitantes (individuos 1, 2 y 3 en la Figura 1). Dichos habitantes pueden conectarse bien directamente con el pozo o bien a través de algún otro habitante que se haya conectado previamente. Cada una de estas conexiones tiene un coste; por ejemplo, en la Figura 1 el jugador 1 tiene un coste 4 por unirse al pozo y un coste 1 por unirse al jugador 3. Dado que todo el mundo quiere conectarse al pozo (ya sea directa o indirectamente) se suele asumir que el árbol de más bajo coste se va a formar. En el caso de la Figura 1 sería el árbol: Pozo  $\rightarrow$  1  $\rightarrow$  3  $\rightarrow$  2; cuyo coste total es  $4 + 1 + 2 = 7$ . El problema ahora radica en cómo repartir estos costes teniendo en cuenta todos los datos del

---

PALABRAS CLAVE: Teoría de juegos, investigación operativa.

problema. Una forma de buscar una solución a este problema es a través de un *juego cooperativo con utilidad transferible (TU)*. Formalmente, un *juego TU con costes* es un par  $(N, c)$ , donde  $N = \{1, \dots, n\}$  denota al conjunto de jugadores y  $c : P(N) \rightarrow \mathbb{R}$  es una función que asigna a cada coalición  $S \subseteq N$  un coste  $c(S)$ . Generalmente se asume que  $c(\emptyset) = 0$ . Cada vector  $x \in \mathbb{R}^n$  representa una posible *asignación*, donde  $x_i$  denotaría lo que se asigna al jugador  $i$ .

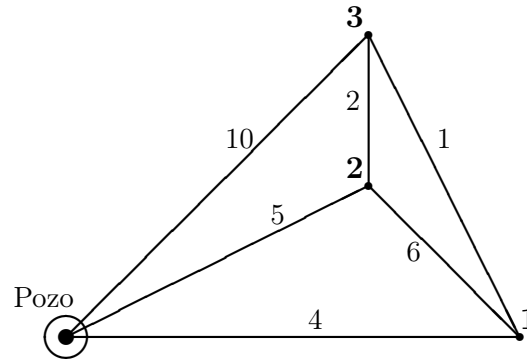


Figura 1: Ejemplo de un problema de asignación de costes

El problema de asignación de costes que teníamos originalmente se puede convertir en un juego TU con costes definiendo  $c(S)$  como el mínimo coste en que es necesario incurrir para conectar a todos los jugadores de  $S$  con el pozo (en caso de que los jugadores de  $N \setminus S$  no estén presentes).

El problema ahora radica en elegir para cada juego TU con costes una asignación razonable. Esto se hace a través de las reglas de asignación. Una *regla de asignación* es una función  $\varphi$  que, dado un juego  $(N, c)$ , elige una asignación en  $\mathbb{R}^n$ , *i.e.*,

$$\begin{aligned} \varphi : \Omega \subseteq G^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (N, c) &\longmapsto \varphi(N, c). \end{aligned}$$

Ahora, para elegir de entre la infinidad de reglas de asignación posibles, se suele utilizar el *método axiomático*. Es decir, se imponen sucesivamente distintas propiedades que las asignaciones elegidas por una regla deberían cumplir y se van estudiando las reglas resultantes. Dependiendo de cada problema interesará imponer unas condiciones u otras, llegando así a distintas reglas para las distintas familias de problemas.

A continuación enumeramos algunas de las propiedades que se suelen exigir en este contexto:

**Eficiencia:** La más trivial de todas, el coste total de la red ha de ser pagado. Una asignación  $x$  es eficiente si  $\sum_{i=1}^n x_i = c(N)$

**Simetría:** Si dos agentes son iguales (la red resultante de intercambiar sus “nombres” es la red de partida), entonces ambos deben pagar lo mismo.



**Racionalidad individual:** Nadie debe pagar más de lo que le costaría unirse al pozo él solo ( $x_i \leq c(i)$ ).

**Estabilidad (Racionalidad coalicional):** Ninguna coalición paga más de lo que podrían asegurarse ellos solos: para cada  $S \subsetneq N$ ,  $\sum_{i \in S} x_i \leq c(S)$ . Una asignación que no cumple esta condición para alguna coalición  $S$  es inestable, ya que dicha coalición no aceptaría la asignación y formaría su propia red.

...

## Juegos no Cooperativos

A diferencia de los juegos cooperativos, en los que el estudio se lleva a cabo de un modo axiomático, la teoría de juegos no cooperativos se centra en los aspectos estratégicos de los modelos. Antes de nada introducimos formalmente las definiciones de juego no cooperativo y de *equilibrio de Nash*.

Un juego no cooperativo es una terna  $(N, A, \varphi)$ , donde:

- $N := \{1, \dots, n\}$  es el conjunto de jugadores,
- $A := \prod_{i \in N} A_i$  y  $A_i$  es el conjunto de estrategias del jugador  $i$ ,
- $\varphi := (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  y  $\varphi_i : A \rightarrow \mathbb{R}$  es la función de utilidad del jugador  $i$ .

Dado un perfil de estrategias  $a \in A$ ,  $a_i \in A_i$  denota la estrategia del jugador  $i$  y  $a_{-i} \in \prod_{j \neq i} A_j$  el perfil de estrategias de todos los jugadores salvo el jugador  $i$ . Ahora, un perfil de estrategias  $\bar{a} \in A$  es un equilibrio de Nash si para todo  $i \in N$  y para todo  $a_i \in A_i$  tenemos  $\varphi_i(a_i, \bar{a}_{-i}) \leq \varphi_i(\bar{a})$ . Es decir,  $\bar{a}$  es un equilibrio de Nash si ningún jugador puede mejorar desviándose unilateralmente; suponiendo que los demás jugadores van a jugar según  $\bar{a}$ , nadie tiene incentivos a desviarse. Este concepto, introducido por Nash en 1950 es la piedra angular de la teoría de juegos no cooperativos. Aunque para muchas familias de juegos es necesario introducir refinamientos de este concepto de equilibrio, la idea subyacente es casi siempre la misma: “nadie ha de tener incentivos a desviarse unilateralmente”.

A continuación presentamos dos ejemplos que esperamos sirvan como una primera aproximación al equilibrio de Nash, concepto central de esta rama de la teoría de juegos.

	D	N
D	-10,-10	0,-15
N	-15,0	-1,-1

Figura 2: El dilema del prisionero

La Figura 2 ilustra el dilema del prisionero, quizá el juego no cooperativo más difundido y estudiado. La forma de leer el juego es la siguiente. El jugador 1 elige fila (D o N) y el jugador 2 elige columna (D o N), para cada combinación de

estrategias de los dos jugadores tenemos los pagos en la correspondiente casilla de la matriz. Por ejemplo, si el jugador 1 elige N y el jugador 2 elige D, el pago es -15 para el primero y 0 para el segundo. El dilema del prisionero se basa en la siguiente historia. Dos individuos (que no se conocen entre ellos) son arrestados y puestos en celdas separadas. Ambos son acusados del mismo delito y a ambos se les plantea la posibilidad de delatar al otro (D) o no hacerlo (N). En caso de que ninguno delate al otro, ambos pasarán un mes en la cárcel. Por otro lado, si ambos se delatan, ambos pasarán diez meses entre rejas. Finalmente, si sólo un jugador delata, entonces tenemos que éste sale libre mientras que el otro pasará quince meses en la cárcel. A la vista de los pagos, parece natural que ambos jugadores intenten coordinarse y no delatarse, para así pasar sólo un mes cada uno en la cárcel. Sin embargo, no es posible jugar (N,N) en equilibrio. La razón es que, independientemente de lo que haga el jugador 2, el jugador 1 siempre sale mejor parado eligiendo D, y lo mismo pasa con el jugador 2 (la estrategia D es una estrategia dominante). Por tanto, el único equilibrio de Nash de este juego es aquél en el que ambos jugadores se delatan mutuamente y pasan cada uno diez meses en la cárcel. Muchas situaciones de la vida real se ajustan al dilema del prisionero; la más conocida de ellas es la decisión entre dos grandes potencias de fabricar o no bombas atómicas (EEUU y la URSS durante la guerra fría). Aunque los dos países están bien si nadie tiene bombas atómicas, ambos tienen incentivos para fabricarlas, ya que si uno tiene y el otro no, entonces el primero tendrá mucho más control. La única situación de equilibrio es aquella en la que las dos potencias desarrollan armamento nuclear.

Si bien el concepto de equilibrio de Nash sirve para estudiar el comportamiento humano en muchos modelos, también es cierto que en otros muchos ha recibido fuertes críticas. Uno de los modelos más estudiados dentro del ámbito de la psicología del comportamiento es la siguiente versión del juego del ultimátum. Un hombre detiene por la calle a los individuos A y B, y les propone el siguiente juego. Yo tengo 100 euros que son para vosotros dos, la forma que os propongo para repartirlos es la siguiente: A ha de hacerle una oferta de reparto a B, si B la acepta entonces se hace el reparto, y si B la rechaza entonces ninguno de los dos se lleva nada. ¿Que ha de ofrecer A? Bajo la hipótesis de que los dos jugadores sólo se preocupan de maximizar el dinero que reciben, cualquier oferta de A debería ser aceptada por B; aún más, bajo este supuesto la oferta 100 para A y 0 para B, que es aceptada por B ya que no gana nada rechazando, es un equilibrio de Nash. Sin embargo, en la vida real muy poca gente aceptaría este reparto. Este juego y pequeñas modificaciones del mismo han sido estudiados empíricamente para ver en qué situaciones los jugadores se conforman con la oferta natural (50,50) y en cuáles tienden a acercarse al (100,0).

## Foliaciones: hojaldres en variedades

Antonio Sotelo Armesto

Departamento de Xeometría e Topoloxía

24 de Mayo de 2005

### Resumen

Una *foliación* de dimensión  $n$  de una variedad  $M$  de dimensión  $m$  es, a grosso modo, una descomposición de  $M$  en subvariedades conexas de dimensión  $n < m$  llamadas *hojas*, las cuales se aglomeran localmente como los subconjuntos de  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$  con segunda coordenada constante.

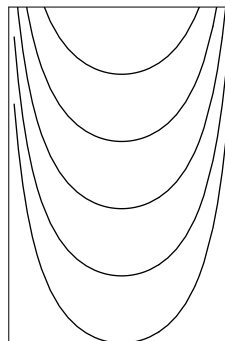
**Ejemplo 1.** El ejemplo más elemental de foliación de dimensión  $n$  es la foliación de  $\mathbb{R}^m$  como  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ , donde las hojas son los planos de la forma  $\mathbb{R}^n \times \{c\}$ , con  $c \in \mathbb{R}^{m-n}$ .

**Ejemplo 2.** En el toro  $T = ([-1, 1] \times [-1, 1]) / \sim$ , donde  $\sim$  es la relación que identifica los lados del cuadrado, definimos el campo de vectores  $X = (1, m)$ . Si  $m$  es racional, las órbitas se cierran y son homeomorfas a  $\mathbb{S}^1$ . Si  $m$  es irracional, cada órbita es homeomorfa a  $\mathbb{R}$  y es densa en  $T$ .

**Ejemplo 3.** Definimos la función

$$f_y(x) = \frac{x^2}{1-x^2} + y,$$

en la banda  $[-1, 1] \times \mathbb{R}$ . El conjunto de los grafos de las funciones  $f_y$  con  $y \in \mathbb{R}$  determina una foliación de dimensión uno cuyas hojas se llaman *componentes de Reeb*. Restringiéndonos a  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  y cocientando, podemos traspasar esta foliación al toro.



En todos los ejemplos anteriores es fácil ver que la variedad es localmente un producto y por tanto los ejemplos 2 y 3 son foliaciones. De hecho, tenemos el siguiente resultado general:

**Teorema 1** (Flujo tubular). *Cualquier flujo sin singularidades induce una foliación de dimensión uno en la variedad.*

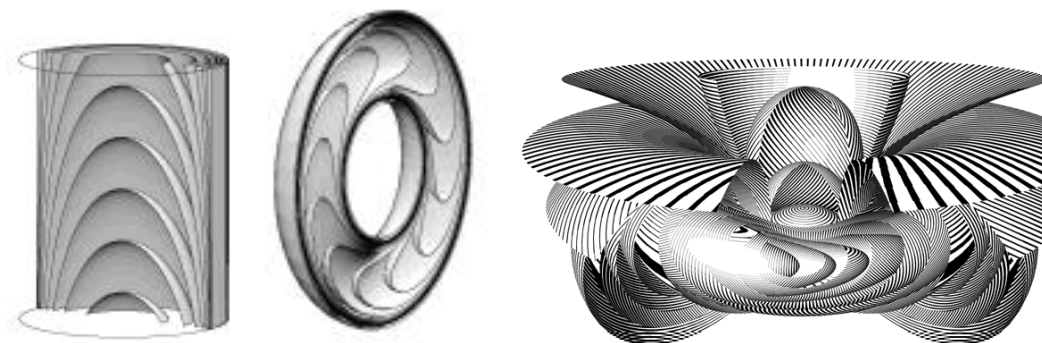
---

PALABRAS CLAVE: Foliación, foliación de Reeb, teorema de Frobenius.

Para cualquier campo de vectores  $X$  denotamos  $Xf = df(X)$ . El corchete de Lie de dos campos de vectores  $X$  e  $Y$  es el campo de vectores que queda definido por la ecuación  $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$ . El teorema del flujo tubular puede ser generalizado. Dicha generalización se conoce como teorema de Frobenius. En el caso particular de dimensión 2 tenemos

**Teorema 2** (Frobenius). *Sea  $M$  una variedad de dimensión mayor que 2. Sean  $X$  e  $Y$  dos campos de vectores linealmente independientes en  $M$ . Entonces el espacio vectorial generado por  $X$  e  $Y$  en cada punto,  $\text{span}\{X, Y\}$ , induce una foliación de dimensión 2 en  $M$  si y sólo si  $[X, Y] \in \text{span}\{X, Y\}$ .*

**Ejemplo 4.** La siguiente construcción da lugar a una foliación de dimensión 2 en la esfera  $\mathbb{S}^3$  que desempeñó un papel importante en la teoría de foliaciones. Haciendo girar la componente de Reeb se obtiene una foliación en el cilindro macizo tal y como muestra la primera figura. Cocientando para obtener un toro macizo se obtiene la segunda foliación. Visualizando  $\mathbb{S}^3$  como  $\mathbb{R}^3$  compactificado a un punto del infinito, se puede probar que  $\mathbb{S}^3$  consiste en pegar dos toros macizos por el borde. En definitiva, realizando la anterior construcción y considerando las foliaciones anteriores en los respectivos toros, se obtiene la foliación de Reeb en  $\mathbb{S}^3$  (tercera figura). Esta foliación tiene una hoja compacta homeomorfa a un toro. Todas las demás son homeomorfas a  $\mathbb{R}^2$  y se acumulan en la hoja compacta.



## Control óptimo de sistemas físicos. Aplicaciones medioambientales

Francisco Javier Fernández Fernández

Departamento de Matemática Aplicada

31 de Mayo de 2005

### Resumen

#### El problema abstracto

Consideremos un sistema físico determinado por la siguiente ecuación (ecuación de estado):

$$A(y) = f(v), \quad (1)$$

donde  $y$  será el estado del sistema físico,  $v$  será el control que nosotros podemos ejercer sobre el sistema a través de la aplicación  $f$  y  $A$  determinará el comportamiento del estado  $y$ . Un problema de control óptimo consistirá en:

$$(P) \quad \begin{cases} J(y^*, v^*) = \min J(y, v) \\ v \in \mathcal{U}_{ad} \text{ y } (y, v) \text{ verificando (1)} \end{cases}$$

donde  $\mathcal{U}_{ad}$  será el conjunto de controles admisibles y  $v^*$  el control óptimo.

#### Un ejemplo académico

Supongamos que queremos minimizar la temperatura en una placa sometida a un flujo de calor por una parte de su frontera y con temperatura constante e igual a cero en el resto de la frontera. Para ello, disponemos de un refrigerador que debemos colocar en un punto determinado de manera que la temperatura de la placa en una determinada norma, sea lo más reducida posible. En este caso la variable de estado será la temperatura de la placa ( $y = \theta$ ), el control será la posición del refrigerador dentro de la placa ( $v = \mathbf{b}$ ), el funcional de coste será la temperatura de la placa en una determinada norma ( $J(\theta, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \|\theta\|^2$ ) y la ecuación de estado será la ecuación del calor:

$$\begin{cases} -div(k\nabla\theta) = R_{\mathbf{b}} & \text{en } \Omega, \\ k \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} = g & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \theta = 0 & \text{sobre } \Gamma_0. \end{cases} \quad (2)$$

Donde  $k > 0$  es la conductividad térmica del material,  $R_{\mathbf{b}}$  es el refrigerador y  $g$  es el flujo de calor a través de la frontera Neumann  $\Gamma_1$ . Este problema de control se

---

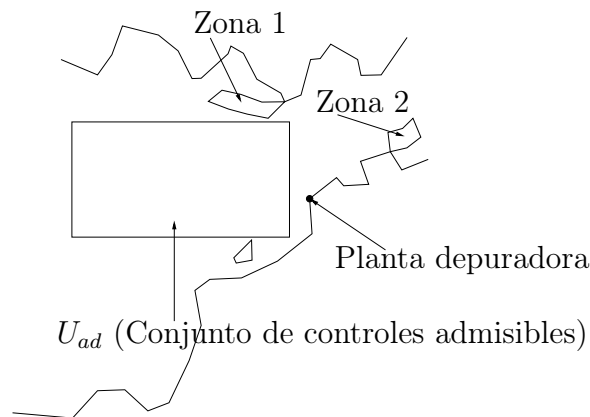
PALABRAS CLAVE: Control Óptimo, Mecánica de Fluidos.

resuelve numéricamente, obteniéndose el siguiente resultado (solución de la ecuación de estado en el control óptimo):



### Un problema real. Control de contaminantes en una ría

Consideraremos un dominio ocupado por aguas poco profundas (ría de Vigo), en donde debemos colocar un emisario de una determinada substancia contaminante ( $U_{ad}$ ), de forma que, minimizando el gasto producido por la distancia entre el emisario y la planta depuradora, garanticemos que la densidad de contaminante en unas determinadas zonas (Zona 1 y Zona 2) esté **por debajo de unos determinados máximos permitidos**.



En este caso, el problema de control se formularía en los siguientes términos:

$$\min_{\mathbf{b} \in U_{ad}} J(\rho, \mathbf{b}), \quad (3)$$

donde  $U_{ad} \subset \bar{\Omega}_\epsilon$  es un conjunto convexo, cerrado y no vacío. Con las siguientes restricciones:

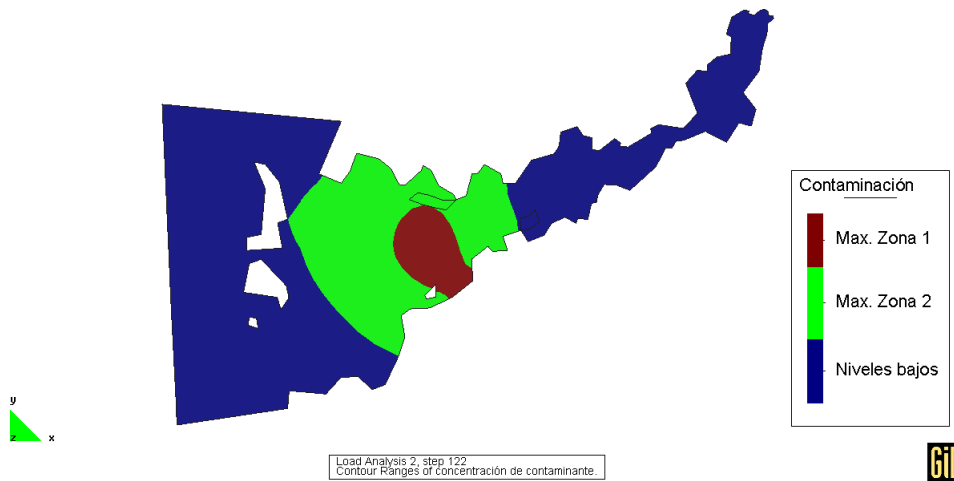
- Ecuación de estado.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho - \beta \Delta \rho = -k\rho + \frac{1}{h} M_c R_{\mathbf{b}, \epsilon} & \text{en } Q_T, \\ \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sobre } \Sigma_T, \\ \rho(0) = \rho_0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (4)$$

- Restricciones sobre el estado.

$$\rho|_{\bar{A} \times [0, T]} \leq \sigma. \quad (5)$$

donde  $J(\rho, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|_{\mathbb{R}^2}^2$ ,  $\mathbf{u}$  es la velocidad del agua (calculada usando un modelo para aguas poco profundas) y  $\sigma > 0$  es la densidad máxima permitida en la zona protegida  $A$ . Al igual que el ejemplo anterior, este problema se puede resolver numéricamente:



## Bibliografía

- [1] J. L. Lions *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, (1968).
- [2] F. J. Fernández Fernández *Análisis teórico de ciertos problemas de control y aplicación de la Derivación Automática en su resolución numérica*, Tesina de Licenciatura (2004).





## Módulos cruzados de álgebras conmutativas

Pablo Fernández Ascariz

Departamento de Álgebra

7 de Xuño de 2005

### Resumo

O concepto de módulo cruzado xurdiu na categoría de grupos nun traballo de J.H.C. Whitehead de 1949 en topoloxía alxebrica. Este concepto xogou un papel importante tamén noutras áreas das matemáticas como son a teoría de representacións de grupos,  $K$ -teoría alxebrica, homoloxía cíclica, teoría combinatoria de grupos, álgebra homolóxica e xeometría diferencial.

De forma análoga ós módulos cruzados de grupos pódese definir o concepto de módulo cruzado de álgebras conmutativas: sexa  $K$  un anel conmutativo e  $R$  unha  $K$ -álgebra. Un  $R$ -módulo cruzado  $(C, R, \nu)$  é unha  $R$ -álgebra  $C$ , xunto cun morfismo de  $R$ -álgebras  $\nu : C \rightarrow R$  tal que para todo  $c \in C$  e  $r \in R$  verifica:

- $\nu(rc) = r\nu(c)$
- $\nu(c)c' = cc'$  (identidade de Peiffer)

Se só se verifica a primeira das dúas condicións o que se ten é un módulo pre-cruzado.

Parte do interese deste concepto radica en que xeneraliza simultaneamente o de  $R$ -álgebra e o de  $R$ -módulo da seguinte maneira:

- Sexa  $C$  unha  $R$ -álgebra.  $(C, C, id)$  é un módulo cruzado.
- Dado un  $R$ -módulo  $M$ , pódesele dar unha estrutura de álgebra coa multiplicación cero. Se denotamos por  $0 : M \rightarrow R$  o morfismo cero,  $(M, R, 0)$  é un  $R$ -módulo cruzado.

Ademais, co fin de poder ver os módulos cruzados dende distintos puntos de vista, búscanse definicións equivalentes e así, demóstrase que o concepto de módulo cruzado coincide co de  $cat^1$ -álgebra, 1-cubo e categoría interna na categoría de álgebras conmutativas.

Os morfismos defínense da seguinte maneira: sexan  $(C, R, \nu), (C', R', \nu')$  dous módulos cruzados; un morfismo entre eles é un par de morfismos de  $K$ -álgebras

---

PALABRAS CLAVE: Álgebras conmutativas, módulos cruzados.

$$\phi : C \rightarrow C' , \psi : R \rightarrow R' ,$$

tales que  $\phi(rc) = \psi(r)\phi(c)$  y  $\nu' \circ \phi = \psi \circ \nu$ .

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\nu} & R \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ C' & \xrightarrow{\nu'} & R' \end{array}$$

Temos entón unha categoría  $XMod_K$  de módulos cruzados.

O seguinte paso consiste na descrición da categoría, construíndo os núcleos, o produto tensor, os igualadores, o produto semidirecto... Neste proceso obsérvase que tódolos obxectos correspondentes a límites constrúense de maneira totalmente natural, mentres que os correspondentes a colímites requiren contruicións máis complicadas.

Exemplo: dados dous módulos cruzados  $(C, R, \nu), (C', R', \nu')$  e un morfismo  $(\phi, \psi)$  entre eles, tense:

- $Ker(\phi, \psi) = (Ker\phi, Ker\psi, \bar{\nu})$ , onde  $\bar{\nu}$  é a restricción do morfismo  $\nu$  a  $Ker\phi$ ,  $\bar{\nu} : Ker\phi \rightarrow Ker\psi$ .

- $Coker(\phi, \psi) = (C'/\phi(C)_{R'}(\psi(R)_{R'} \cdot C'), Coker\psi = R'/\psi(R)_{R'}, \bar{\nu})$  onde  $\phi(C)_{R'}$  denota a menor  $R'$ -subálgebra que contén a  $\phi(C)$  en  $C'$ ,  $\psi(R)_{R'}$  o menor ideal de  $R'$  que contén a  $\psi(R)$  e  $\bar{\nu}$  é a aplicación que induce  $\nu'$  no cociente.

Para ver que estas definicións teñen validez tense que comprobar que os obxectos definidos son módulos cruzados, que cumpren as propiedades universais de núcleo e conúcleo e que xeneralizan os conceptos de núcleo e conúcleo na categoría de  $R$ -álgebras conmutativas e de  $R$ -módulos.

Unha vez descrita a categoría estúdiáanse algunhas das súas propiedades. Unha delas é o feito de que  $XMod_K$  é tripleable sobre  $Set$ ; é dicir, existe un funtor  $U : XMod_K \rightarrow Set$  cun adxunto á esquerda. A adxunción é a seguinte:

$$\begin{array}{l} U : XMod_K \rightarrow Set \\ (C, R, \nu) \rightsquigarrow C \times R \end{array}$$

e o seu adxunto á esquerda resulta de compoñer os seguintes dous funtores:

$$\begin{array}{l} F_1 : Set \longrightarrow K - Alg \\ X = \{x_1, \dots, x_n\} \rightsquigarrow K^+[x_1, \dots, x_n] \end{array}$$

onde  $K^+[x_1, \dots, x_n]$  denota a parte graduada positiva da álgebra de polinomios.

$$\begin{array}{l} F_2 : K - Alg \rightarrow XMod_K \\ H \rightsquigarrow (\bar{H}, H \oplus H \oplus (H \otimes H), in) \end{array}$$

onde  $\bar{H}$  denota o menor ideal de  $H \oplus H \oplus (H \otimes H)$  que contén a tódolos elementos da forma  $(h, 0, 0)$  e  $in$  é a inclusión de  $\bar{H}$  en  $H \oplus H \oplus (H \otimes H)$ .

Tamén se verifica que a categoría é semiabeliana, isto é,  $XMod_K$  ten produtos e coprodutos binarios, obxecto cero, cadrados cartesianos de monomorfismos rotos, coigualadores de pares núcleo, verifica o lema corto roto dos cinco, os epimorfismos regulares son estables por cadrados cartesianos e as relacións de equivalencia son efectivas.

Mentres que a noción de categoría abeliana reflexa as propiedades alxebricas típicas de grupos abelianos e módulos, o concepto de categoría semiabeliana reflexa as propiedades de grupos, aneis e álgebras. Ó comprobar que  $XMod_K$  está dentro deste conxunto estáselle enmarcando no contexto adecuado para desenvolver teorías de homoloxía.

A homoloxía constrúese utilizando a seguinte adxunción:

$$F : XMod_k/(C, R, \nu) \rightarrow XMod_{(C, R, \nu)}$$

$$(A, B, \sigma) \rightsquigarrow (C, R, \nu) \otimes_{(A, B, \sigma)} \Omega_{(A, B, \sigma)}$$

$$G : XMod_{(C, R, \nu)} \rightarrow XMod_k/(C, R, \nu)$$

$$(A, B, \sigma) \rightsquigarrow (A, B, \sigma) \rtimes (C, R, \nu)$$

que permite construír a seguinte cadea

$$L_{(C, R, \nu)} := (C, R, \nu) \otimes_{(A, B, \sigma)} \Omega_{(A, B, \sigma)} :$$

$$\dots \rightrightarrows (C, R, \nu) \otimes_{(C, R, \nu) \rtimes (C, R, \nu)} \Omega_{(C, R, \nu) \rtimes (C, R, \nu)} \rightarrow (C, R, \nu)$$

Defínense a homoloxía e cohomoloxía da maneira seguinte:

- $H_n((C, R, \nu), (G, H, \omega)) = H_n(N((G, H, \omega) \otimes_{(C, R, \nu)} L_{(C, R, \nu)}))$
  - $H^n((C, R, \nu), (G, H, \omega)) = H^n(\text{Hom}_{(C, R, \nu)}(NL_{(C, R, \nu)}, (G, H, \omega)))$ ,
- onde  $NL_{(C, R, \nu)}$  é o complexo de Moore asociado a  $L_{(C, R, \nu)}$ .

Estudiar as propiedades desta homoloxía e desenvolver unha teoría de localización son os pasos a seguir.

## Bibliografía

- [1] M. André, *Homologie des algèbres commutatives*, Springer, 1974.
- [2] D. Arias Mosquera, *(Co)Homología de módulos precruzados*, Tesis Doctoral, Universidad de Santiago, 2003.
- [3] P. Carrasco, A. M. Cegarra y A. R.-Grandjeán, *(Co)Homology of crossed modules*, J. Pure Appl. Algebra **168** (2002) 147-176.
- [4] K.J. Norrie, *Actions and automorphisms of crossed modules*, Bull. Soc. Math. France **118** (1990) 129-146.

- [5] T. Porter, *Some categorical results in the theory of crossed modules in commutative algebras*, J. Algebra **109** (1987) 415-429.
- [6] J.H.C. Whitehead, *Combinatorial homotopy II*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949) 453-496.

## Estadística en Finanzas

Beatriz Pateiro López

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

14 de Junio de 2005

### Resumen

El análisis de series de tiempo constituye, desde hace años, una parte fundamental dentro del estudio de los mercados financieros. Por ejemplo, la predictibilidad de cambios en los precios de activos es un tema de investigación de evidente interés. Del mismo modo, el trade-off entre rentabilidad y riesgo juega un papel muy importante en muchas teorías y modelos financieros tales como la teoría de selección de carteras o la valoración de opciones.

Una serie de tiempo es un conjunto de observaciones  $x_t$ , cada una de ellas recogida en un instante de tiempo  $t$ . Son muchas las situaciones en el mundo real en las que las observaciones de una determinada variable se realizan de forma secuencial en el tiempo. Los valores del futuro dependen de los valores de los que disponemos en el presente y en este sentido, entender la dinámica subyacente por la cual los datos son generados nos permite predecir valores y controlar posibles situaciones futuras. Éstos son algunos de los objetivos del análisis de series temporales.

El primer paso en el análisis de una serie temporal es la selección de un modelo matemático adecuado a los datos. Será natural ver la serie como la realización de un proceso estocástico, es decir, supondremos que cada observación  $x_t$  es la realización de una determinada variable aleatoria  $X_t$ .

### Estacionariedad y Estacionariedad Estricta

Sea  $\{X_t, t \in T\}$  una serie de tiempo

**Definición 1** (Función de medias). *Llamaremos función de medias a la función del tiempo que en cada instante  $t$  proporciona la esperanza de la distribución marginal de  $X_t$ , es decir:*

$$\mu_t = E(X_t)$$

**Definición 2** (Función de varianzas). *Llamaremos función de varianzas a la función del tiempo que en cada instante  $t$  proporciona la varianza de la distribución marginal de  $X_t$ , es decir:*

$$\sigma_t^2 = \text{Var}(X_t)$$

---

PALABRAS CLAVE: Series de Tiempo, estacionariedad.

**Definición 3** (Función de autocovarianzas). *Llamaremos función de autocovarianzas del proceso a la función que describe las covarianzas entre dos variables cualesquiera, es decir:*

$$\gamma_X(r, s) = \text{Cov}(X_r, X_s) = E[(X_r - \mu_r)(X_s - \mu_s)] \quad r, s \in T$$

Un concepto muy importante en el análisis de series temporales es el de estacionariedad. Aunque los procesos estocásticos a los que nos estamos refiriendo existen conceptualmente, en la mayoría de situaciones prácticas sólo podremos disponer de una realización de dicho proceso. Por esta razón, para poder estimar características “transversales” del proceso (medias, varianzas, etc.) a partir de la evolución “longitudinal” del mismo, debemos suponer que dichas características “transversales” se mantienen estables a lo largo del tiempo.

**Definición 4** (Estacionariedad Débil). *Se dice que la serie de tiempo  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  es débilmente estacionaria o estacionaria si:*

- (i)  $E|X_t|^2 < \infty \quad \forall t \in \mathbb{Z}$
- (ii)  $E(X_t) = \mu \quad \forall t \in \mathbb{Z}$
- (iii)  $\gamma_X(r, s) = \gamma_X(r + t, s + t) \quad \forall r, s, t \in \mathbb{Z}$

## Precios y Rentabilidades de Activos

Una de las principales cuestiones a resolver dentro del análisis financiero es saber hasta qué punto el pasado de la serie de precios de un activo proporciona información relevante para predecir su comportamiento futuro. Si bien algunas teorías apuestan por la predictibilidad de precios futuros en función de la historia de la serie, muchos son los investigadores que han defendido que el comportamiento de los precios se parece más a una acumulación de cambios puramente aleatorios.

Una de las hipótesis más manejadas en series de alta frecuencia es la de que los precios de activos financieros (o sus logaritmos) se comportan como un paseo aleatorio. En términos estadísticos esto significa que los cambios en los precios son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas<sup>2</sup>, es decir, si  $P_t$  denota el precio de un activo en el instante  $t$  y  $p_t = \ln(P_t)$ , se tiene

$$p_t = p_{t-1} + a_t, \tag{1}$$

donde  $a_t$  es una sucesión de variables aleatorias independientes con media 0.

Este modelo implica que la serie de cambios de precio no tiene memoria y su pasado no podría ser utilizado para predecir el futuro de forma eficiente.

Durante los años 60 se desarrollaron los fundamentos teóricos de los mercados financieros y se llegó a la conclusión de que la hipótesis de independencia en los

<sup>2</sup>La definición de paseo aleatorio varía sensiblemente de unos textos a otros. En la mayoría de artículos de economía, que tratan el comportamiento de los precios, se refieren a paseo aleatorio cuando las diferencias  $p_t - p_{t-1}$  son independientes.

cambios del precio de activos era demasiado restrictiva. Al suponer un modelo como (1), donde  $a_t$  son independientes, se elimina la dependencia del tiempo de los momentos condicionales de  $p_t - p_{t-1}$  de cualquier orden. Sin embargo, muchas series financieras presentan un comportamiento errático, alternando períodos de estabilidad con períodos de turbulencias. Este comportamiento puede ser modelizado permitiendo que el momento de segundo orden condicional cambie con el tiempo, lo cual es incompatible con la teoría de paseo aleatorio. Así, se empiezan a desarrollar modelos en los que variables relacionadas con el precio de activos son martingalas.

La mayoría de los estudios financieros involucran series de rentabilidades en lugar de series de precios. La razón principal es que las series de rentabilidades presentan, en general, mejores propiedades estadísticas. Las series de precios de activos suelen mostrar una tendencia creciente a largo plazo, como se observa en la figura 3, mientras que a corto o medio plazo presentan movimientos de crecimiento y decrecimiento.

Presentamos a continuación algunas de las definiciones de rentabilidad más utilizadas. Supondremos que el activo no paga dividendos.

**Rentabilidad Simple.** La rentabilidad simple o discreta de un activo en el período  $(t - 1, t)$  se define como

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}.$$

**Rentabilidad Continua.** La rentabilidad continua de un activo en el período  $(t - 1, t)$  se define como

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = p_t - p_{t-1},$$

donde  $p_t = \ln(P_t)$ .

La expresión de rentabilidad simple es la utilizada por bancos, instituciones financieras e inversores. Sin embargo, las rentabilidades continuas presentan propiedades estadísticas que las hacen más tratables. Por ello se suele trabajar con series de rentabilidades continuas en investigación.

De la observación de series de rentabilidades se pueden deducir una serie de características comunes. De forma general, podemos establecer que las series de rentabilidades presentan un comportamiento errático en el sentido de que valores extremos de rentabilidad suelen ocurrir con relativa frecuencia. Además, valores negativos de rentabilidad se dan con mayor frecuencia que valores positivos y existe un agrupamiento de la volatilidad (volatility clustering), es decir, períodos de alta volatilidad suelen ser precedidos por períodos de baja volatilidad de mayor o menor duración. Los distintos modelos de series de tiempo propuestos para su aplicación en el campo de las finanzas intentan, en mayor o menor medida, captar este tipo de características.

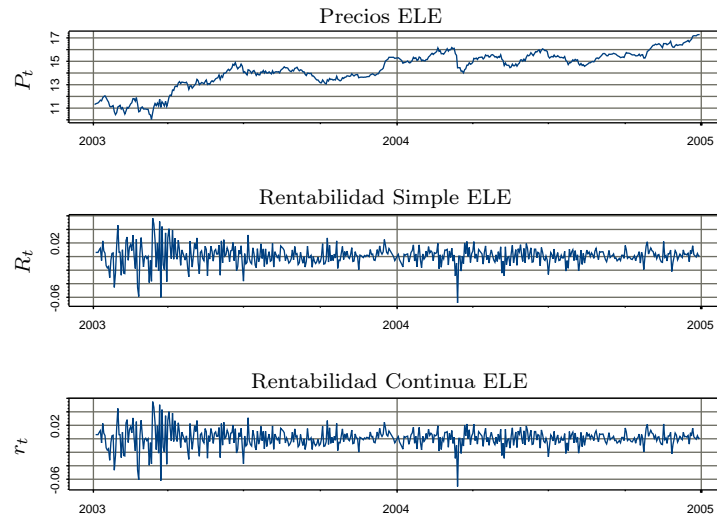


Figura 3: Observaciones diarias de precios de cierre, rentabilidad simple y rentabilidad continua de ELE (Endesa), desde el 1 de Enero de 2003 hasta el 31 de Diciembre de 2004.

## Bibliografía

- [1] BROCKWELL, P. J. AND R. A. DAVIS (1987): *Time Series: Theory and Methods*, Springer-Verlag.
- [2] FAMA, E. F. (1965): "The Behavior of Stock-Market Prices," *Journal of Business*, 34–105.
- [3] TSAY, R. S. (2002): *Analysis of Financial Time Series*, New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc.



## Xeometría e Cosmoxía

Miguel Brozos Vázquez

Departamento de Xeometría e Topoloxía

21 de Xuño do 2005

### Resumo

A Xeometría de Riemann cobrou unha grande importancia co desenvolvemento da Teoría da Relatividade. Esta basea os seus enunciados nunha premisa clave que é a constancia da velocidade da luz ( $c$ ). Así, se  $x_1, x_2, x_3$  son coordenadas espaciais e  $t$  é a coordenada temporal, tense  $c = \frac{ds}{dt} = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}/dt$  de onde  $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2 dt^2 = 0$ . Agora, se definimos a métrica

$$g_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix}$$

un vector luminoso será  $v = (x_1, x_2, x_3, t)$  verificando  $g(v, v) = 0$ . Esta métrica non é definida positiva, pero, fixada unha base ortonormal, un dos vectores ten norma negativa e os outros tres positiva. Cando nos achamos nun espacio de dimensión arbitraria en que só un vector dunha base ortonormal ten norma negativa, dise que a métrica é de Lorentz, e estes vectores dinse temporais (por extensión da terminoloxía relativista); por outra banda, os vectores de norma positiva dinse espaciais. Cando consideramos unha variedade de dimensión 4, cunha métrica de Lorentz, o que temos é un espacio-tempo.

A situación anterior supón unhas condicións ideais á hora de describir o Universo, sen ningunha forza gravitatoria que distorsione o espacio-tempo. Na práctica, atópase un cosmos plagado de campos gravitatorios que interaccionan entre si e os modelos espacio-temporais que se empregan para describilos son máis complexos. Entre estes modelos destacan os espacio-tempos de Robertson-Walker que son variedades de Lorentz da forma

$$\mathbb{R} \times_f N = (\mathbb{R} \times N, g_{\mathbb{R}} \oplus f(t)^2 g_N)$$

é dicir, o espacio é unha variedade produto  $\mathbb{R} \times N$  e a métrica de Lorentz é a suma das métricas dos factores salvo por unha función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  que deforma a métrica da variedade  $N$ . Neste modelo a dimensión temporal é a dada pola coordenada  $t$

---

PALABRAS CLAVE: Variedade de Riemann, producto warped, variedade localmente conformemente chá, espacio-tempo.

e a variedade  $N$  (espacial) ten curvatura constante. Este modelo englobase dentro dun tipo de variedades moito máis ampla que se chaman productos warped: un produto warped de  $(M, g_M)$  e  $(N, g_N)$  é unha variedade produto  $M \times N$  coa métrica  $g_M \oplus f^2 g_N$  onde  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^+$  é unha función positiva.

Cando se estudian modelos cosmolóxicos, unha propiedade razoable a esixirilles é que a densidade de luz que un observador percibe (localmente) sexa uniforme. Esta característica pódese describir matematicamente dicindo que o espacio-tempo é localmente conformemente chan (LCChan). Dado que unha aplicación conforme é, en xeral, aquela que conserva ángulos, un espacio-tempo LCChan é aquel para o que cada punto está contido nun entorno que é conformemente equivalente ó correspondente espacio euclidiano, isto é, aplícase nun espacio chan por unha aplicación que conserva os ángulos. Dito doutro xeito, se unha variedade de Lorentz (ou en xeral con calesquera dimensións espaciais e temporais) é LCChan a métrica pódese escribir localmente como  $g_M = \phi^2 g_{\mathbb{E}} = \phi^2 \text{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1)$  para  $\phi$  unha aplicación definida no entorno e onde  $\mathbb{E}$  é o espacio chan *correspondente*. Nótese que deste xeito os ángulos non varían, pois se  $\alpha_{ab}$  é o ángulo que forman  $a$  e  $b$ ,

$$\cos \alpha_{ab}^M = \frac{g_M(a, b)}{\|a\|_M \|b\|_M} = \frac{g_{\mathbb{E}}(a, b)}{\|a\|_{\mathbb{E}} \|b\|_{\mathbb{E}}} = \cos \alpha_{ab}^{\mathbb{E}}$$

Entre os modelos cosmolóxicos de espacio-tempos, cómpre estudar cales son LCChans. Deste xeito vese que:

1. Os espazos Robertson-Walker son todos LCChans.
2. Outros productos warped, como os chamados espazos estáticos, que son da forma  $N \times_f \mathbb{R}$  onde o factor deformado é o temporal ( $\mathbb{R}$ ), tamén se empregan como modelos en campos gravitatorios intensos; sen embargo, existen fortes restriccións sobre a función de deformación  $f$  e o factor 3-dimensional  $N$  para que o espacio sexa LCChan.
3. Outros modelos máis complexos, que supoñen a existencia de espazos non observables empréganse en escalas cuánticas, son os modelos cosmolóxicos multidimensionais (MCM):  $M_0 \times_{f_1} M_1 \times_{f_2} M_2 \times \dots \times_{f_\nu} M_\nu$  que responden a un modelo de variedade máis xeral que os espazos warped: os espazos multiwarped. Nos MCM a variedade  $M_0$  é un espacio-tempo que representa a parte observable do universo, é o chamado *espacio externo*.  $M_1, \dots, M_\nu$  teñen métrica definida positiva (riemanniana), son os chamados *espazos internos* e entre as súas características destacan o seren compactos e de *tamaño pequeno*, o suficientemente pequenos como para non ser observables. Para que estes modelos sexan LCChans, existen fortes restriccións sobre as funcións de deformación, así como sobre os  $M_i$ , pois para  $i = 1, \dots, \nu$  teñen curvatura constante. Ademais, o número máximo de espazos externos con estas características é 4.

## Un problema da Acústica: a lavadora do meu veciño

Andrés Prieto Aneiros

Departamento de Matemática Aplicada

28 de Xuño de 2005

### Resumo

Os materiais porosos son amplamente usados en moitos dos problemas de control de ruído na vida cotiá. Estes materiais son coñecidos pola súa capacidade para disipar as ondas acústicas que se propagan a través deles. De feito, ao longo das últimas décadas realizáronse grandes esforzos para caracterizar o comportamento acústico destes materiais (ver por exemplo [6]). Por materiais porosos entendemos aqueles que están compostos dunha matriz sólida (rígida ou elástica) que está completamente saturada por un fluido. O comportamento acústico dos medios porosos dependerá non só do fluido que os rodea senón tamén das propiedades de rixidez do seu esqueleto.

A mediados do pasado século, para estudar a propagación ondulatoria en sistemas de conductos lineares, usáronse modelos simplificados onde os materiais absorbentes quedaban caracterizados por unha impedancia normal do material. Máis recentemente, cando o esqueleto sólido é ríxido, os materiais porosos foron modelados mediante unha estratexia de fluido equivalente onde se definían propiedades como a densidade e a compresibilidade dinámica (ver [2]).

Estes novos parámetros poden ser obtidos mediante leis experimentais ou empíricas. Un modelo deste tipo foi presentado por primeira vez por Delany e Bazley [5] en 1970 e segue a ser amplamente empregado para describir a propagación acústica en materiais fibrosos. Posteriormente, outros autores presentaron modificacións e melloras para este modelo, por exemplo en Morse e Ingard [6], Allard e Champoux [2], entre outros.

Para o caso máis realista no que a deformación elástica do esqueleto do material poroso se está a ter en conta, a base teórica do comportamento mecánico dos materiais porosos foi establecida por Biot [3]. A súa teoría describe a propagación de ondas elásticas nun medio poroso saturado por un fluido compresible (ver a completa referencia de Allard [1]). Pero nesta exposición, só se tratará o caso máis sinxelo no que se estudian os materiais porosos de matriz sólida ríxida: o modelo de Darcy (ver Bermúdez *et al.* [4]).

A principal diferenza entre o problema da propagación acústica nun fluido compresible (como pode ser o ar) e nun medio poroso radica na dependencia non linear

---

PALABRAS CLAVE: Medios porosos, problemas non lineares de autovalores.

que os coeficientes, que aparecen nas ecuacións en derivadas parciais que definen o modelo, posúen con respecto á frecuencia. Isto provoca que o estudio do problema de resonancia, por exemplo no interior dunha lavadora, e o problema de control pasivo de ruído usando materiais porosos, leven asociados un problema de autovalores non linear.

## Bibliografía

- [1] J.-F. Allard. *Propagation of sound in porous media: modelling sound absorbing materials*, Elsevier, New York, 1993.
- [2] J.-F. Allard, Y. Champoux. *New empirical equations for sound propagation in rigid frame fibrous materials*, J. Acoust. Soc. Am. **91** (6) (1992), 3346-3353.
- [3] M.A. Biot. *Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Lower frequency range, and II. Higher frequency range*, J. Acoust Soc. Am. **28** (2) (1956), 168-178 and 179-191.
- [4] A. Bermúdez, J.L. Ferrín, A. Prieto. *A finite element solution of acoustic propagation in rigid porous media*, Int. J. Numer. Meth. Engrg. **62** (10) (2005) 1295-1314.
- [5] M.A. Delany, E.N. Bazley. *Acoustic properties of fibrous absorbent materials*, Appl. Acoust. **3** (1970), 105-116.
- [6] P.M. Morse, K.U. Ingard. *Theoretical acoustics*, McGraw-Hill, New York, 1978.

## Datos no espazo: unha introdución á xeostatística

Rosa María Crujeiras-Casais

Departamento de Estatística e Investigación Operativa

8 de Novembro de 2005

### Resumo

Un dos obxectivos da estatística é a modelización de procesos que presentan comportamentos aleatorios; procesos nos que, por diversas causas, inflúe o azar (procesos estocásticos). Para iso faise necesaria a obtención de mostras de tales procesos que nos aporten información sobre eles.

As ferramentas da inferencia estatística clásica sitúannos ante mostras aleatorias simples, onde os datos proveñen sempre dunha mesma distribución e de xeito independente. Pero esta suposición de independencia entre os datos non é sempre realista. Por exemplo, na observación dun certo índice bursátil ao longo do tempo, pódese detectar unha dependencia entre datos próximos no tempo. O mesmo ocorre cando observamos un proceso no espazo, coa diferenza de que, cando temos datos observados no tempo, a dependencia vén só dunha dirección (do pasado); a dependencia de datos no espazo pode vir de calquera dirección (observacións do proceso que están tomadas en puntos situados uns preto dos outros teñen máis probabilidade de presentar un comportamento similar que outras observacións tomadas en puntos afastados no espazo). A estatística espacial ocúpase do estudo de procesos estocásticos no espazo.

A estatística espacial converteuse nos últimos anos nunha ferramenta fundamental para diversas disciplinas, como a ecoloxía, a epidemioloxía ou a xeoloxía. Aínda dentro da estatística espacial, poderíamos facer a seguinte distinción entre os procesos estocásticos no espazo (Cressie, 1991):

- i) Procesos Xeoestatísticos. O proceso  $Z$  toma valores de xeito continuo sobre unha rexión  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Por exemplo, supoñamos que nos interesa medir a concentración que existe dun certo metal pesado no solo ou no ambiente. As medicións da concentración de metal poderían tomarse en calquera punto, posto que o proceso toma valores en calquera localización (Chilés and Delfiner, 1999).
- ii) Procesos Reticulares. O proceso  $Z$  toma valores nun conxunto finito de puntos no espazo,  $D = \{s_1, \dots, s_n\}$ . Un exemplo: en estudos epidemiolóxicos, os datos de índice de mortandade por unha certa enfermidade en Galicia veñen

---

PALABRAS CLAVE: xeostatística, covariograma, variograma.

dados por comarcas (as localizacións sobre as que toma valores o proceso son puntos asociados a cada comarca).

- iii) Procesos Puntuais. O proceso  $Z$  toma valores nunha rexión  $D \subset \mathbb{R}^2$ , pero as posicións onde se atopan realizacións deste proceso  $Z$  distribúense de xeito aleatorio sobre  $D$ , sen que o investigador teña control sobre elas. Esta é a situación que se plantexa en estudos forestais (medicións en árbores: o investigador non ten control sobre onde tomar as medicións).

Dado que o comportamento das tres grandes clases de procesos no espazo é distinto, as técnicas empregadas no estudo de cada un destes procesos tamén o son. Aínda así, o obxectivo da estatística espacial (nas súas tres vertentes) é a descrición (modelización) dos procesos subxacentes aos datos observados, en gran medida, co fin de *predecir* o seu comportamento (estimar o proceso en rexións onde non dispoñemos de observacións).

Consideremos o caso dun proceso xeostatístico. Unha vez obtida unha mostra do proceso sobre unha rexión de interese  $D$ , poderíamos pensar en *interpolación* sobre unha grella para tratar de estimar o comportamento do proceso en puntos onde non temos observacións. Pero é aquí onde nos atopamos coa particularidade dos datos no espazo: esta interpolación debe ter en conta a estrutura de dependencia dos datos. É por isto que un dos problemas fundamentais na estatística espacial é a modelización da variabilidade, a descrición da estrutura de dependencia. Para poder explicar esta dependencia, debemos verificar que o proceso é estacionario, é dicir, que a dependencia entre dúas observacións do proceso non depende das posicións nas que son tomadas, senón do vector diferenza entre as localizacións (ou nun caso máis sinxelo, a dependencia é función só da distancia entre as posicións: isotropía).

Definamos o covariograma (1) e o variograma (2) como:

$$C(h) = Cov(Z(s), Z(s+h)), \quad s, s+h \in D, \quad (1)$$

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} Var(Z(s) - Z(s+h)), \quad s, s+h \in D. \quad (2)$$

Tanto o covariograma como o variograma describen a estrutura de dependencia dos datos. Estas dúas funcións do proceso teñen interese por si mesmas, posto que modelizan a dependencia; pero ademais, son fundamentais cando o noso obxectivo é a estimación do proceso en puntos onde non temos observacións. O variograma ou o covariograma interveñen dentro dos métodos de interpolación óptima de datos espaciais: kriging (Stein, 1999).

Existe unha ampla literatura sobre a estimación destas dúas funcións, de xeito paramétrico (supoñendo un modelo teórico dependente dun parámetro: modelo esférico, exponencial, potencial...) e unha alternativa máis recente: estimación non paramétrica (sen suposición algunha sobre o modelo de dependencia).

## Bibliografía

- [1] Chilés, J.P. and Delfiner, P. (1999). *Geostatistics. Modeling Spatial Uncertainty*. John Wiley & Sons.
- [2] Cressie, N. (1991). *Statistics for Spatial Data*. John Wiley & Sons.
- [3] Stein, M. (1999). *Interpolation of Spatial Data*. Springer-Verlag.





## Introducción a la geometría k-simpléctica

Silvia Vilariño Fernández

Departamento de Xeometría e Topoloxía

29 de Noviembre de 2005

### Resumen

La Mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana son dos formalizaciones matemáticas alternativas a la Mecánica Clásica que nos permiten resolver de un modo sencillo problemas que desde las leyes de Newton serían demasiado complejos. Estas formalizaciones se aplican a aquellos sistemas de partículas en los que el espacio de configuración es una variedad y en ellas surge de modo natural la denominada geometría simpléctica.

Sea  $M$  una variedad diferenciable. Se llama *fibrado tangente* a  $M$  a la unión de todos los espacios tangentes a la variedad  $M$ , esto es :  $TM = \bigcup_{m \in M} T_m M$ .

El espacio cotangente a  $M$  en  $m$  coincide con el dual del espacio tangente y se denota por  $T_m^* M$ . La unión de todos los espacios cotangentes forman el *fibrado cotangente* o espacio de fase,  $T^* M$ .

Si la variedad  $M$  es el espacio de configuración de un sistema de partículas, el fibrado tangente es el espacio de estados (posiciones y velocidades) y el cotangente el espacio de fases (posiciones y momentos).

#### Mecánica Lagrangiana:

Sea un sistema de fuerzas conservativo con espacio de configuración  $M$ , es decir, la fuerza total es el opuesto del gradiente del potencial,  $F = -gradV$ . Se llama *función lagrangiana* a la diferencia entre la energía cinética y el potencial,  $L = E_{cin} - V : TM \rightarrow \mathbb{R}$ , es por tanto función de la velocidad en cada punto.

Si denotamos por  $(q^i)$  las coordenadas de posición y por  $(v^i)$  las de velocidad, la Mecánica Lagrangiana se reduce a calcular las soluciones,  $c(t)$ , de las ecuaciones

$$v^i(\dot{c}(t)) = \frac{dq^i}{dt} |_{\dot{c}(t)}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v^i} |_{\dot{c}(t)} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i} |_{\dot{c}(t)}, \quad 1 \leq i \leq dim M,$$

llamadas *ecuaciones de Euler-Lagrange*, donde  $\dot{c}$  se define por:

$$\begin{aligned} \dot{c} : \mathbb{R} &\rightarrow TM \\ t &\mapsto \dot{c}(t) = (c(t), c'(t)) \end{aligned}$$

---

PALABRAS CLAVE: Fibrado tangente, fibrado cotangente, variedad k-simpléctica.

Se puede comprobar sin dificultad a partir de las Leyes de Newton, que las trayectorias que siguen las partículas en un sistema de fuerzas conservativo coinciden con las soluciones  $c(t)$  de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden extender a cualquier lagrangiano, esto es cualquier aplicación  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ . De esta forma la Mecánica Lagrangiana nos permite plantear problemas más generales que los que resuelve la Mecánica Clásica.

### Mecánica Hamiltoniana:

La idea en este caso es sustituir las variables generalizadas de la velocidad,  $v^i$ , por las variables generalizadas del momento, llamadas momento conjugado y dadas por  $p_i = \partial L / \partial v^i$ . En coordenadas cartesianas  $p_i$  coincide con el momento lineal, es decir, el producto de la masa por la velocidad.

Definimos la *función hamiltoniana*  $H$  por: 
$$H(q^i, p_i) = \sum_{i=1}^{\dim M} v^i p_i - L(q^i, p_i)$$

Si consideramos como  $L$  el lagrangiano definido anteriormente, se obtiene que el Hamiltoniano coincide con la función energía total del sistema.

A partir del cálculo de  $dH$  se obtienen las siguientes ecuaciones que son las ecuaciones del movimiento de la Mecánica Hamiltoniana o ecuaciones de Hamilton:

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} |_{\mathcal{L}(\dot{c}(t))} = - \frac{dp_i}{dt} |_t, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} |_{\mathcal{L}(\dot{c}(t))} = - \frac{dq^i}{dt} |_t,$$

donde  $\mathcal{L} : TM \rightarrow T^*M$  es la transformación de Legendre dada por  $\mathcal{L}(q^i, v^i) = (q^i, p_i = \partial L / \partial v^i)$ .

Al igual que en la Mecánica Lagrangiana, las soluciones  $c(t)$  de las ecuaciones de Hamilton describen las trayectorias que siguen las partículas en movimiento.

Estas ecuaciones se pueden considerar asociadas a cualquier hamiltoniano  $H$ , es decir, cualquier aplicación de  $T^*M$  en  $\mathbb{R}$ .

### Geometría Simpléctica:

En la formulación hamiltoniana aparecen de modo natural las *variedades simplécticas*, es decir, un par  $(M, \omega)$  donde  $M$  es una variedad diferenciable y  $\omega$  una 2-forma cerrada no degenerada.

El ejemplo más sencillo de variedad simpléctica es el fibrado cotangente con la forma simpléctica canónica  $\omega = -d(p_i dq^i) = dq^i \wedge dp_i$ .

Se puede comprobar que en un sistema dinámico holonómico (el espacio de configuración es una variedad) con hamiltoniano  $H$ , las trayectorias del sistema coinciden con las curvas integrales del campo de vectores  $X_H$  solución de la ecuación  $\iota_{X_H} \omega = dH$ , por lo que esta ecuación recibe el nombre de versión geométrica de las ecuaciones de Hamilton.

En el formalismo lagrangiano surge el problema de que no existe una forma simpléctica canónica, sin embargo podemos solventar este problema a partir de la

transformación de Legendre, considerando la 2-forma  $\omega_L = \mathcal{L}^*\omega = dq^i \wedge d(\partial L/\partial v^i)$  y la función energía  $E_L = \mathcal{L}^*H$  como hamiltoniano y obteniendo así la ecuación

$$\iota_{X_L}\omega_L = dE_L,$$

donde las curvas integrales del campo de vectores  $X_L$  son las soluciones de las ecuaciones de Euler- Lagrange. Establecemos así una equivalencia entre el formalismo lagrangiano y el hamiltoniano.

### Geometría $k$ -simpléctica:

Se llama variedad  $k$ -simpléctica a una familia  $(M, \omega_A, V; 1 \leq A \leq k)$  donde  $M$  es una variedad de dimensión  $2n$ ,  $V$  una distribución  $nk$ -dimensional y cada  $\omega_A$  es una 2-forma cerrada verificando:

$$(i) \omega_A|_{V \times V} = 0 \quad y \quad (ii) \bigcap_A Ker \omega_A = \{0\}.$$

La geometría  $k$ -simpléctica surge al intentar generalizar los resultados que se obtienen en geometría simpléctica cuando consideramos como espacio de fase la suma de Whitney de  $k$  copias de  $T^*M$  en vez de  $T^*M$ . Esta variedad  $(T_k^1)^*M = T^*M \oplus \dots \oplus T^*M$  se llama *fibrado cotangente de  $k^1$ -covelocidades*.

Si  $(q^i, p_i^A)$  son las coordenadas en la  $A$ -ésima copia de  $T^*M$ , en  $(T_k^1)^*M$  obtenemos las coordenadas  $(q^i, p_i^A; 1 \leq A \leq k)$ .

Para obtener la generalización de la estructura simpléctica consideramos en cada copia la forma simpléctica canónica  $\omega_A$  y su pull-back a  $(T_k^1)^*M$  mediante las proyecciones canónicas sobre cada factor. Así obtenemos  $k$  2-formas  $\omega_A = dq^i \wedge dp_i^A$  en  $(T_k^1)^*M$  que forman una variedad  $k$ -simpléctica junto con  $V = ker\tau$  donde  $\tau : (T_k^1)^*M \rightarrow M$  es la proyección natural. Así la ecuación de Hamilton asociada a un hamiltoniano  $H : (T_k^1)^*M \rightarrow \mathbb{R}^k$  es

$$\sum_{A=1}^k \iota_{X_A}\omega_A = dH.$$

Al igual que se hizo en Mecánica se puede desarrollar el formalismo lagrangiano a partir del hamiltoniano. Definimos, en primer lugar, la variedad de  $k^1$ -velocidades  $T_k^1M = TM \oplus \dots \oplus TM$ .

En este caso la transformación de Legendre asociada a una función lagrangiana  $L : T_k^1M \rightarrow \mathbb{R}^k$  es una aplicación de  $T_k^1M$  a  $(T_k^1)^*M$ , que no es más que considerar las  $k$  aplicaciones de  $T^*M$  en  $TM$  análogas a la conocida de Mecánica. Así la expresión local de la transformación de Legendre viene dada por  $\mathcal{L}(q^i, v_A^i) = (q^i, p_i^A)$  donde  $p_i^A = \partial L/\partial v_A^i$ .

Las 2-formas a considerar son por tanto  $(\omega_L)_A = \mathcal{L}^*\omega_A$ ,  $1 \leq A \leq k$  y obtenemos así la ecuación

$$\sum_{A=1}^k \iota_{(X_L)_A}(\omega_L)_A = dE_L.$$

Esta ecuación es la versión geométrica de las ecuaciones de Euler-Lagrange ya que las secciones integrales de las soluciones  $((X_L)_1, \dots, (X_L)_k)$ , es decir, las aplicaciones  $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow T_k^1 Q$  tales que  $(X_L)_A(\phi(t)) = (\phi)_*(t)(\partial/\partial t^A|_t)$ , son las soluciones de la ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$v_A^i(\phi(t)) = \frac{\partial q^i}{\partial t^A} |_{\phi(t)}, \quad \sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^i} |_{\phi(t)} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i} |_{\phi(t)}, \quad 1 \leq i \leq \dim M.$$

La principal ventaja de estos formalismos es que la obtención de los campos  $X_A$  o  $(X_L)_A$  es en general más sencilla que la resolución de las ecuaciones diferenciales necesarias para obtener las trayectorias. Además nos permiten resolver de un modo mucho más sencillo y elegante problemas que desde la Mecánica serían demasiado largos y complicados.

## Bibliografía

- [1] R. Abraham, J.E. Marsden, Foundations of Mechanics, Second Edition, The Benjamin-Cummings Publishing Company, New York, 1978.
- [2] F. Munteanu, A.M. Rey, M. Salgado: “The Günther’s formalism in classical field theory: momentum map and reduction”, *J. Math. Phys.* bf 45(5) (2004) 1730–1751.

## Matemáticas y Medio Ambiente

Luz María García García

Departamento de Matemática Aplicada

20 de Diciembre de 2005

### Resumen

La implantación de determinadas industrias podría empeorar gravemente la calidad de las masas de agua que se localicen en sus proximidades. De este modo, predecir la calidad de una determinada masa de agua ante determinadas situaciones sería de gran utilidad para tratar de minimizar cualquier posible riesgo ambiental. Así, la simulación numérica de la calidad de las aguas se convierte en una herramienta muy valiosa, y es en este sentido en el que relacionaremos las matemáticas con el medio ambiente.

### Introducción

Estudiar la calidad de una determinada masa de agua consiste en cuantificar la evolución de la concentración de determinadas especies químicas o parámetros (como el  $pH$ ) que nos puedan dar una idea del estado del sistema. La buena o mala calidad de las aguas se regula por ley y está basada en estudios científicos.

Existen muchos modelos de calidad de aguas dependiendo de las características del problema. Algunos ejemplos son los siguientes:

1. *Modelo simple de calidad de aguas.* Consistiría en estudiar la demanda biológica de oxígeno (DBO) y el oxígeno disuelto (OD) que hay en el agua. Valores altos de DBO y bajos de OD indicarían que hay una gran cantidad de materia orgánica en descomposición. Se podría utilizar para evaluar el efecto de industrias relacionadas con mataderos, granjas avícolas, fábricas de quesos, celulosas, . . .
2. *Modelo de Eutrofización.* Se estudiaría el impacto de nutrientes, como el nitrógeno y el fósforo, en el ecosistema. Se sabe que altas concentraciones de estos nutrientes provocan un rápido crecimiento de los productores primarios (fitoplancton) y por lo tanto de la materia orgánica, incrementándose así el consumo de oxígeno y pudiendo dar lugar a una masa de agua totalmente anóxica. Estos modelos se utilizan para estudiar el impacto de aguas residuales urbanas, aguas de escorrentía de zonas agrícolas, etc.

---

PALABRAS CLAVE: Ecuaciones de aguas poco profundas, calidad de aguas.

3. *Modelo de calidad de aguas para una mina a cielo abierto con presencia de sulfuros de hierro.* La oxidación de los sulfuros de hierro que a menudo quedan expuestos en las paredes de una mina a cielo abierto contribuye a la acidificación de las aguas y a la liberación de metales pesados, lo cual puede traer consecuencias altamente negativas para el ecosistema. Esta charla se ha centrado en este modelo en particular y en el impacto que estos procesos podrían tener en la calidad de las aguas de un futuro lago que se formase en el hueco de una mina, aunque en este acta se recogerá únicamente una descripción de un modelo general de calidad de aguas.

### Estudio de la calidad de las aguas

La evolución de la concentración de una determinada especie química  $c_i$  en un determinado punto del dominio de cálculo  $\Omega$  se puede representar mediante la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dc_i}{dt} = tr + cpm, \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

donde  $tr$  representa la tasa de variación de concentración de una determinada especie química debido a su transporte por el régimen de flujo y  $cpm$  se refiere a los mecanismos de producción y consumo de esa especie química.

### Cálculo de $tr$

Para calcular el término  $tr$  necesitamos conocer las ecuaciones que nos permitirán determinar el régimen de flujo. Para el caso de un lago, el régimen de velocidades se puede calcular mediante las ecuaciones de aguas poco profundas tridimensionales (ecuaciones (2) a (6)). Además, y dado que las variaciones de la densidad de la columna de agua ocasionadas por un calentamiento/enfriamiento estacional de la su-

Tabla 1: Nomenclatura para las ecuaciones (2) a (9)

Nombre	Significado	Nombre	Significado
$(u, v, w)$	Velocidades	$(u_s, v_s)$	Velocidad fuentes volúmicas
$S$	Fuentes volúmicas	$Q_s$	Fuentes en la superficie del dominio
$f$	Factor de Coriolis	$Q_b$	Fuentes en el fondo del dominio
$\eta$	Elevación superficial	$(\tau_{sx}, \tau_{sy})$	Tensiones en la superficie
$\rho$	Densidad	$(\tau_{bx}, \tau_{by})$	Tensiones en el fondo
$g$	Aceleración de la gravedad	$F_\theta$	Término de viscosidad horizontal
$p_a$	Presión atmosférica	$D_\nu$	Término de viscosidad vertical
$(F_u, F_v)$	Fuerzas viscosas hor.	$\hat{H}$	Intercambio de calor con la atmósfera
$\nu_t$	Viscosidad vertical	$\theta_s$	Temperatura de las fuentes volúmicas

perficie, tienen una gran influencia en el patrón general de circulación del lago, será necesario añadir las ecuaciones que rigen la evolución de la temperatura (ecuaciones (7) a (9)).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t) + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y, z, t) + \frac{\partial w}{\partial z}(x, y, z, t) = S(x, y, z, t). \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, t) + \frac{\partial u^2}{\partial x}(x, y, z, t) + \frac{\partial(v u)}{\partial y}(x, y, z, t) + \frac{\partial(w u)}{\partial z}(x, y, z, t) = \\ f v(x, y, z, t) - g \frac{\partial \eta}{\partial x}(x, y) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial x}(x, y) - \frac{g}{\rho_0} \int_z^{\eta(x, y)} \frac{\partial \rho}{\partial x}(x, y, z, t) dz \\ + F_u(x, y, z, t) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_t \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z, t) \right) + u_s S, \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t}(x, y, z, t) + \frac{\partial(u v)}{\partial x}(x, y, z, t) + \frac{\partial v^2}{\partial y}(x, y, z, t) + \frac{\partial(w v)}{\partial z}(x, y, z, t) = \\ - f u(x, y, z, t) - g \frac{\partial \eta}{\partial y}(x, y) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial y}(x, y) - \frac{g}{\rho_0} \int_z^{\eta(x, y)} \frac{\partial \rho}{\partial y}(x, y, z, t) dz \\ + F_v(x, y, z, t) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_t \frac{\partial v}{\partial z}(x, y, z, t) \right) + v_s S, \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} - w = Q_s \quad y \quad \left( \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{1}{\rho_0 \nu_t} (\tau_{sx}, \tau_{sy}) \quad \text{en } \Gamma_s \quad (5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + w = Q_b \quad y \quad \left( \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{1}{\rho_0 \nu_t} (\tau_{bx}, \tau_{by}) \quad \text{en } \Gamma_b, \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial u \theta}{\partial x} + \frac{\partial v \theta}{\partial y} + \frac{\partial w \theta}{\partial z} = F_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \left( D_v \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \hat{H} + \theta_s S, \end{array} \right. \quad (7)$$

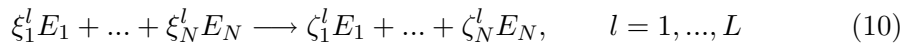
$$\left\{ \begin{array}{l} D_h \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{q_n}{\rho_0 c_p} + T_{Q_s} Q_s, \quad \text{en } \Gamma_s, \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \quad \text{en } \Gamma_b, \end{array} \right. \quad (9)$$

### Cálculo de $cpm$

Para calcular el término  $cpm$ , es necesario conocer con antelación todos los procesos mediante los cuales se puede generar o consumir una determinada especie química.

Supongamos que la calidad de la masa de agua que queremos estudiar está determinada por un conjunto de  $N$  especies químicas  $E_i$ , y llamemos  $c_i$  a la concentración de cada una de esas especies químicas. Consideremos además que el proceso ambiental de nuestro interés implica  $L$  reacciones químicas del tipo



donde  $\xi_i$  y  $\zeta_i$  son los coeficientes estequiométricos.

La evolución de la concentración de una especie química viene dada por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs):

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{l=1}^L (\zeta_i^l - \xi_i^l) v_{r_l}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (11)$$

con  $v_{r_l}$  la velocidad de la  $l$ -ésima reacción química, expresada generalmente mediante una ley de velocidad empírica como la que sigue

$$v_{r_l} = k_l \prod_{i=1}^N y_i^{\alpha_i^l} \quad (12)$$

donde  $\alpha_i^l$  es el orden de reacción con respecto a la especie  $E_i$  y  $k_l$  es la constante de velocidad, que es función de la temperatura.

## Bibliografía

- [1] Bermúdez, A. (2005) Continuum Thermomechanics. *Birkhäuser*
- [2] Miglio, E., Quarteroni, A. and Saleri, F. Mathematical and Numerical Modelling for Environmental Applications. Phd. Thesis. *Universidad Politecnica de Milan*.
- [3] Mike 21/3 Flow Model FM. Hydrodynamic and Transport Module (Scientific Documentation)(2004). *DHI Water and Environment (Dinamarca)*.